

Kvadratické rovnice

Rovnici $f(x) = g(x)$ s neznámou $x \in R$ nazýváme *kvadratickou rovnicí* (rovnici 2. stupně) s reálnými koeficienty, jestliže ji lze ekvivalentními úpravami převést na tvar

$$ax^2 + bx + c = 0; a, b, c \in R, a \neq 0.$$

Je-li $b = 0$, jedná se o tzv. *ryze kvadratickou rovnici*.

Je-li $c = 0$, hovoříme o *rovnici bez absolutního členu*.

Pokud je $a = 1$, hovoříme o *normované kvadratické rovnici* nebo o *kvadratické rovnici v normovaném tvaru*. Tu zpravidla zapisujeme ve tvaru $x^2 + px + q = 0$; $p, q \in R$.

Parametrem, rozhodujícím o řešitelnosti kvadratické rovnice, je *diskriminant* $D = b^2 - 4ac$.

1. Je-li $D > 0$, pak kvadratická rovnice má dva různé reálné kořeny $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.
2. Je-li $D = 0$, pak kvadratická rovnice má jeden dvojnásobný reálný kořen $x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$.
3. Je-li $D < 0$, pak kvadratická rovnice nemá v R řešení.

Věta: Jsou-li x_1, x_2 kořeny kvadratické rovnice, lze danou rovnici vyjádřit pomocí součinu kořenových činitelů ve tvaru $ax^2 + bx + c = 0$; $a(x - x_1)(x - x_2)$.

Příklady

1. Řeš v R kvadratické rovnice:

- | | | |
|---|--|--|
| a) $4x^2 - 8x = 0$ | b) $5x^2 + x = 0$ | c) $4x^2 = 1$ |
| d) $x^2 + 36 = 0$ | e) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ | f) $4x^2 - 20x + 25 = 0$ |
| g) $2x^2 + 10x + 17 = 0$ | h) $4x^2 - 16x - 20 = 0$ | i) $\frac{3}{t+3} + \frac{3-t}{t} = \frac{11}{10}$ |
| j) $\frac{1}{x} + \frac{1}{50-x} = \frac{1}{12}$ | k) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1} = 0$ | l) $\frac{x+1}{x-3} + \frac{x+3}{x-1} = 0$ |
| m) $\frac{1}{x} + \frac{4}{x+3} + \frac{4}{x-3} = 0$ | n) $\frac{u+4}{u-4} - \frac{u+5}{u-5} - 1 = 0$ | o) $\frac{1}{x+5} + 0,2 = \frac{-1}{5+2x}$ |
| p) $\frac{4x+5}{x} - \frac{12}{x-2} = 1$ | q) $1 + \frac{8}{x-4} - \frac{16}{x^2-16} = 0$ | r) $\frac{x}{x+2} + \frac{1}{x-2} = \frac{11}{8}$ |
| s) $\frac{2x+1}{x+3} - \frac{x-1}{x^2-9} = \frac{x+3}{3-x} - \frac{4+x}{3+x}$ | t) $\frac{2x-3}{x^3+1} = \frac{1}{x^2-x+1} - \frac{2}{x^2+2x+1}$ | |

2. Sestav kvadratickou rovnici ve tvaru $ax^2 + bx + c = 0$ (kde a, b, c jsou celá čísla), jejímiž kořeny jsou daná čísla x_1 a x_2 a proveď zkoušku (rovnici vyřeš):

- | | | |
|--|----------------------------------|------------------------------|
| a) $x_1 = -\frac{1}{3}; x_2 = \frac{1}{2}$ | b) $x_1 = \frac{3}{4}; x_2 = -2$ | c) $x_1 = x_2 = \frac{3}{4}$ |
|--|----------------------------------|------------------------------|

d) $x_1 = 0,4; x_2 = 2,5$

e) $x_1 = \frac{5}{6}; x_2 = -\frac{2}{3}$

f) $x_1 = 0,6; x_2 = \frac{5}{3}$

3. Zkrat' zlomky a uveď podmínky, za kterých mají smysl:

a) $\frac{4x^2 + 11x - 3}{2x^2 + 7x + 3} =$

b) $\frac{8x^2 + 10x + 3}{12x^2 + 5x - 3} =$

c) $\frac{6x^2 + 35x - 6}{3x^2 + 20x + 12} =$

d) $\frac{2x^2 + 15x + 7}{3x^2 + 22x + 7} =$

e) $\frac{x^2 - x - 6}{3x^2 + 4x - 4} =$

f) $\frac{-100x^2 + 30x - 2}{3 - 20x - 100x^2} =$

4. Slovní úlohy

- a) Při srazu bývalých spolužáků si všichni zúčastnění navzájem podávali ruce. Jeden z nich spočítal, že stisků rukou bylo 66. Kolik spolužáků se sešlo na srazu?
- b) Najdi tři po sobě jdoucí přirozená čísla, pro která je druhá mocnina prostředního o jedna větší než součin zbývajících dvou čísel.
- c) Najdi pětici po sobě jdoucích přirozených čísel, pro kterou je součet druhých mocnin prvních tří čísel roven součtu druhých mocnin posledních dvou čísel.
- d) Obdélník má obvod 80 m a obsah 351 m². Urči délky jeho stran.
- e) Přepona pravoúhlého trojúhelníku je o 2 cm delší než jedna odvěsna a o 16 cm delší než druhá odvěsna. Urči délky stran trojúhelníku.
- f) Urči rozměry obdélníku, který má obvod 24 cm a délku úhlopříčky 9 cm.
- g) Kdybych jel na narozeninovou party 120 km průměrnou rychlostí o 10 km/h větší, byl bych na místě o 24 minut dříve a stihl bych slavnostní přípitek. Jak dlouho mi trvala cesta?
- h) Když zvětšíme stranu čtverce o 5 cm, zvětší se jeho obsah o 95 cm². Vypočítej délku strany původního čtverce.
- i) Jana měla vypočítat 70 úloh. Kdyby denně vypočítala o dvě více, než si naplánovala, skončila by o 4 dny dříve. Za kolik dní chtěla původně všechny úlohy vypočítat?
- j) Skupina studentů šla do kavárny oslavit maturitu. Domluvili se, že za útratu zaplatí všichni stejně. Když měli platit, zjistili, že dva z nich zapomněli peníze doma. Ostatní se tedy dohodli, že zaplatí za ně. Každý ze zbývajících studentů tak zaplatil o 26 Kč více, než původně měl. Kolik studentů bylo ve skupině, jestliže celkový účet byl 1 560 Kč?
- k) Součet prvních n přirozených čísel $1 + 2 + 3 + \dots + n = 188\,805$. Urči n .
- l) Najdi dvojciferné číslo, pro které platí: Číslice na místě jednotek je o 1 větší než číslice na místě desítek. Součin čísla a jeho ciferného součtu je 405.

- m)** Bazén se naplní vodou za 6 hodin, jsou-li otevřeny oba přívody. Prvním z nich by se bazén naplnil o 5 hodin dříve než druhým. Za jak dlouho se bazén naplní, otevřeme-li pouze výkonnější přívod?
- n)** V nádrži tvaru kvádra je 1 500 hl vody, která dosahuje výšky 2,5 m. Urči rozměry dna, jestliže víš, že jeden jeho rozměr je o 4 m delší než druhý.
- o)** Výslednice dvou sil, které svírají pravý úhel, má velikost 25 N. Když menší sílu zvětšíme o 8 N a větší sílu o 4 N zmenšíme, velikost jejich výslednice se nezmění. Vypočítej velikosti sil.
- p)** Dva vodiče zapojené paralelně (vedle sebe) dávají výsledný odpor $R = 1,5 \Omega$. První z nich má přitom o 4Ω větší odpor než druhý. Urči odpory těchto vodičů.
- q)** Míč byl vržen svisle vzhůru rychlostí $25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Za jak dlouho bude míč ve výšce 20 m nad zemí? (Počítej s přibližnou hodnotou tíhového zrychlení $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.)
- r)** Parník urazil 48 km proti proudu a stejnou vzdálenost zpět za celkový čas 5 hodin. Jakou rychlostí by jel parník po klidné hladině jezera, jestliže rychlost proudu v řece je 4 km/h?
- s)** Plavec plave rychlostí $0,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Nejprve se vydal po proudu řeky, po 525 metrech se otočil a plaval proti proudu zpět. Do výchozího místa se vrátil za 20 minut. Jakou rychlost má proud v řece?
- t)** Pravidelný mnohoúhelník má celkem 252 úhlopříček. Kolik má tento mnohoúhelník vrcholů?
- u)** Je možné určit hodnotu „nekonečného“ zlomku $3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \dots}}}$?

Výsledky

1. Řeš v $\mathbb{R}$ kvadratické rovnice:

- | | | |
|----------------------|----------------------|-----------------------------------|
| a) $0; -2$ | b) $0; -\frac{1}{5}$ | c) $\pm \frac{1}{2}$ |
| d) $\emptyset$ | e) $3; \frac{1}{2}$ | f) $\frac{5}{2}$ |
| g) $\emptyset$ | h) $5; -1$ | i) $-\frac{15}{7}; 2$ |
| j) $20; 30$ | k) $1; 2$ | l) $\pm \sqrt{5}$ |
| m) $1; -1$ | n) $\emptyset$ | o) $-\frac{5}{2}(3 \pm \sqrt{3})$ |
| p) $5; -\frac{2}{3}$ | q) $0; 8$ | r) $\frac{10}{3}; -6$ |
| s) $-\frac{5}{4}; 1$ | t) $2; -\frac{1}{3}$ | |

2. Sestav kvadratickou rovnici ve tvaru $ax^2 + bx + c = 0$:

- | | | |
|---------------------------|--------------------------|---------------------------|
| a) $6x^2 - x - 1 = 0$ | b) $4x^2 + 5x - 6 = 0$ | c) $16x^2 - 24x + 9 = 0$ |
| d) $10x^2 - 29x + 10 = 0$ | e) $18x^2 - 3x - 10 = 0$ | f) $15x^2 - 34x + 15 = 0$ |

3. Zkrat' zlomky a uveď podmínky, za kterých mají smysl:

- | | |
|---|---|
| a) $\frac{4x-1}{2x+1}; x \neq -3 \wedge x \neq -\frac{1}{2},$ | b) $\frac{2x+1}{3x-1}; x \neq -\frac{3}{4} \wedge x \neq \frac{1}{3}$ |
| c) $\frac{6x-1}{3x+2}; x \neq -6 \wedge x \neq -\frac{2}{3}$ | d) $\frac{2x+1}{3x+1}; x \neq -7 \wedge x \neq -\frac{1}{3}$ |
| e) $\frac{x-3}{3x-2}; x \neq -2 \wedge x \neq \frac{2}{3}$ | f) $\frac{x-0,2}{x+0,3}; x \neq 0,1 \wedge x \neq -0,3$ |

4. Slovní úlohy

- a) Na srazu se sešlo 12 spolužáků.
- b) Řešením úlohy jsou všechny trojice po sobě jdoucích přirozených čísel.
- c) Řešením jsou čísla 10 až 14: $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$

Mimochodem, oba uvedené součty jsou rovny počtu dní v běžném roce, kterých je 365. Na množině celých čísel má pak úloha ještě jedno řešení: čísla -2 , -1 , 0 , 1 a 2 .

- d) Délky stran obdélníku jsou 27 m a 13 m.
- e) Přepona měří 26 cm, odvěsny 24 cm a 10 cm.
- f) Délky stran obdélníku jsou $6 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$ m a $6 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$ m.
- g) Cesta mi trvala 2 hodiny a 24 minut.
- h) Strana čtverce měla délku 7 cm.
- i) Úlohy plánovala počítat 14 dní.
- j) Oslavy se zúčastnilo 12 studentů.
- k) Sečteno bylo prvních 614 přirozených čísel.
- l) Hledané číslo je číslo 45.
- m) Bazén se naplní výkonnějším přívodem za 10 hodin.
- n) Dno nádrže má rozměry 6 m a 10 m.
- o) Původní síly mají velikosti 7 N a 24 N.
- p) Odpory vodičů jsou $R_1 = 6 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$.
- q) Ve výšce 20 metrů bude míč za 1 s (cestou vzhůru) a také za 4 s (až bude padat dolů).
- r) Po hladině jezera by jel parník rychlostí 20 km/h.
- s) Voda v řece proudí rychlostí $0,15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
- t) Jedná se o čtyřicetivýtrojník.
- u) Protože součet $s = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \dots}}} = 3 + \frac{1}{s}$, dostaneme úpravou rovnici $s^2 - 3s - 1 = 0$, jejíž kořen $\frac{3 + \sqrt{10}}{2}$ je hledaným součtem.