

Druhý nácvik na Náboj

1. Jaká je hodnota výrazu $2\,014 - (2\,013 + 2\,012 - 2\,011 + 2\,010 - 2\,009 + \dots + 2 - 1)$?

Řešení: Výraz v závorce je roven $2\,013 + 1\,006 \cdot 1 = 3\,019$. Dostáváme $2\,014 - 3\,019 = -1\,005$.

2. Kroužek svalovců pořádá pro všechny své členy turnaj v přetlačování. Utká se vždy dvojice žáků, kdo přetlačí ruku druhého na stůl, je vítěz zápasu. Poražený z turnaje vypadává. Kroužek svalovců má celkem 29 členů. Kolik utkání musí proběhnout, aby mohl být jednoznačně určen vítěz turnaje?

Řešení: Aby mohl být určen vítěz, musí být 28 poražených, musí tedy proběhnout 28 utkání.

3. Urči počet sčítanců na pravé straně rovnosti $2^{2\,014} = 2 + 2 + 2 + \dots + 2$.

Řešení: Na pravé straně rovnosti vytkneme číslo 2. Protože $2^{2\,014} = 2 \cdot 2^{2\,013} = 2 \cdot (1 + 1 + \dots + 1)$, musí být v závorce $2^{2\,013}$ jedniček, což je i hledaný počet sčítanců.

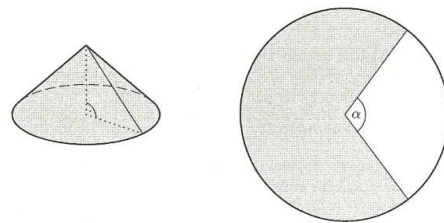
4. Součin neznámého čísla a jeho ciferného součtu je 14 098. Jaký je ciferný součet neznámého čísla?

Řešení: Rozložme číslo 14 098 na součin prvočinitelů: $14\,098 = 2 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 53$. Zkusíme-li všechny možnosti pro ciferný součet, vyhovuje pouze 7, protože $2 \cdot 19 \cdot 53 = 2\,014$ (neznámé číslo s ciferným součtem 7).

5. Průměrný věk 12 učitelů na škole v Malé Horní byl 46,5 roku. Po odchodu šestašedesátiletého pana Děduly do důchodu nastoupil mladý učitel Nováček, a průměrný věk sboru se tak snížil na 43 roků. Jak starý je pan učitel Nováček?

Řešení: Po odchodu pana Děduly je součet roků zbývajících 11 učitelů $12 \cdot 46,5 - 66 = 492$ roků. Po příchodu pana Nováčka bude součet pro 12 učitelů $12 \cdot 43 = 516$ roků. Nováčkovi je 24 let.

6. Výška kužele je stejná jako poloměr podstavy. Plášť takového kužele je možné vyrobit z papíru tvaru kruhu vystřihnutím kruhové výseče. Jaký středový úhel α musí tato výseč mít? Velikost úhlu zaokrouhli na celé stupně.

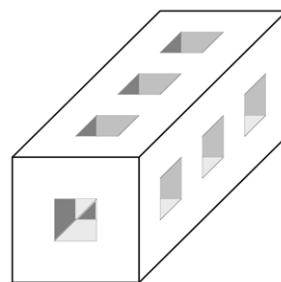


Řešení: Obvod podstavy kužele označme r . Pro stranu kužele platí $s = \sqrt{2}r$. Dále platí: $2\pi s \cdot \frac{360^\circ - \alpha}{360^\circ} = 2\pi r$. Odtud vypočteme $\alpha = 360\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \doteq 105^\circ$.

7. Kolikrát je součin čísel $a = 2 \cdot 10^{2\,014}$ a $b = 5 \cdot 10^{2\,013}$ větší než jejich součet?

Řešení: Pro součin dostaneme $a \cdot b = 2 \cdot 10^{2\,014} \cdot 5 \cdot 10^{2\,013} = 10 \cdot 10^{2\,014 + 2\,013} = 10^{4\,028}$;
pro součet $a + b = 2 \cdot 10^{2\,014} + 5 \cdot 10^{2\,013} = 2,5 \cdot 10^{2\,014}$.
Podíl $(a \cdot b) : (a + b) = 10^{4\,028} : (2,5 \cdot 10^{2\,014}) = 4 \cdot 10^{2\,013}$.

8. Dřevěný kvádr s rozměry $15\text{ cm} \times 15\text{ cm} \times 35\text{ cm}$ provrtal „skrz naskrz“ dřevokazný brouk čtvercovým tunelotvorným způsobem znázorněným na obrázku. Jaký je povrch takto vzniklého tělesa?



Řešení: Ze stran vede do kvádrů celkem 14 „vstupů“. Každý z nich zvětšuje povrch oproti původnímu kvádru o 3 čtverce se stranou 5 cm. Dále je třeba připočítat 8 čtverců okolo „podélného tunelu“.

K původnímu povrchu $2 \cdot 15^2 + 4 \cdot (35 \cdot 15) = 2\,550\text{ cm}^2$ je tedy třeba přičíst celkem $(14 \cdot 3 + 8) \cdot 5^2 = 1\,250\text{ cm}^2$. Povrch provrtaného kvádrů bude $S = 3\,800\text{ cm}^2$.

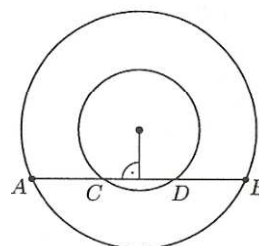
9. Paní Velká a paní Těžká prodávají brusinky. U paní Velké zaplatíte za litr brusinek 120 Kč, u paní Těžké dáte 175 Kč za kilogram. Hmotnost litru brusinek je 640 g. Jirka koupil u paní Velké brusinky za 180 Kč. Kolik korun by stálo stejné množství brusinek u paní Těžké?

Řešení: Jirka koupil u paní Velké 1,5 litru brusinek, jejich hmotnost je 960 g. U paní Těžké by za ně zaplatil 168 Kč.

10. Z 2 014 stejných krychlí o hraně délky 1 dm byla postavena pyramida (na „špičku“ ale krychle nezbyly). Počty krychlí v jednotlivých vrstvách jsou po sobě (sestupně) jdoucí čtvercová čísla – například pyramida postavená z 55 krychlí by měla vrstvy tvořené 25, 16, 9, 4 a 1 krychlí. Kolik krychlí je třeba doplnit, aby byla pyramida kompletní?

Řešení: Na úplnou pyramidu o 17 vrstvách je třeba 1785 krychlí, na pyramidu s 18 patry o 324 více, to je 2 109 krychlí. Ke 2 014 krychlím jich musíme ještě 95 doplnit.

11. Menší ze dvou soustředných kružnic má poloměr 10 cm. Tětiva CD měří 12 cm, délka tětivy AB je 30 cm (podobnou situaci znázorňuje obrázek). Urči poloměr větší kružnice.

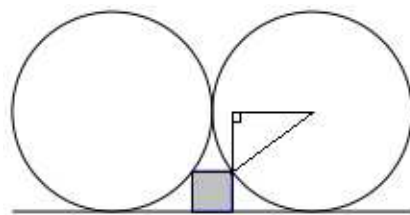


Řešení: Poloměr je 17 cm – stačí jen dvakrát použít Pythagorovu větu. Spojovacím článkem výpočtů je vzdálenost tětiv od středu kružnic (8 cm).

12. Představ si, že budeš psát za sebe postupně sudá přirozená čísla: 2468101214161820... Jaké číslice budou na 2 013. a 2 014. místě?

Řešení: Na začátku zápisu jsou čtyři jednociferná sudá čísla (4 číslice), po nich následuje 45 čísel dvojciferných (90 číslic), 450 trojciferných čísel (1 350 číslic). K jejich zápisu bylo použito celkem 1 444 číslic. Dále následují čtyřciferná sudá čísla. Do 2 014. místa zbývá ještě 570 číslic – to je 142 čtyřciferných sudých čísel (1 000 až 1 282) + 2 číslice. Těmi začíná následující číslo 1 284, na jehož začátku je dvojčíslí 12. Na 2 013. místě je číslice 1 a na 2 014. místě je číslice 2.

13. Mezi dvě dotýkající se kružnice o poloměru 10 cm a jejich společnou tečnu byl vepsán čtverec (viz obrázek). Vypočítej obsah tohoto čtverce.



Řešení: Označme x hledanou délku strany čtverce. Doplňme do obrázku pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami délek $(10 - x)$ a $(10 - \frac{x}{2})$. Podle Pythagorovy věty je $(10 - x)^2 + (10 - \frac{x}{2})^2 = 10^2$. Odtud dostáváme $x = 4$ cm, obsah čtverce je 16 cm^2 .

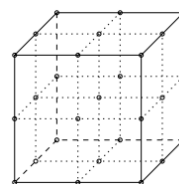
14. Kolika nulami končí zápis čísla $a = 2\,014! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2014$?

Řešení: K nulám v součinu přispívají násobky čísla 5 a čísla sudého (těch je 402), součiny násobků 25 s násobky čtyř (každý přidává k již uvažovaným jednu nulu, takže dostáváme dalších 80 nul), násobky čísla 125 v součinu s násobkem čísla 8 (přičteme 16 nul) a součiny násobků čísla 625 s násobky čísla 16 (připočítáme ještě tři další nuly). Číslo a končí 501 nulami. Mimochodem: WolframAlpha výsledek po dotazu „The Number of Zeros at the End of 2014!“ potvrdí...

15. Pepík a Vašík hrají hru zvanou Aritmomachia. Hráči střídavě volí přirozená čísla z daného rozmezí a ta se postupně načítají. Ten, který dosáhne nebo překročí předem domluvenou hranici, prohrává. Chlapci se dohodli, že budou přidávat čísla z rozmezí 1 až 13 a že začne Pepík. Vašík může zvolit trojciferné číslo, které bude hraniční. Jaké nejmenší číslo by měl zvolit, aby (pokud neudělá chybu) měl jistotu výhry?

Řešení: Vašík musí zvolit hraniční číslo tak, aby při přidávání svých čísel mohl udržovat Pepíka v „prohraných“ pozicích. Kdyby mohl zvolit např. číslo 15, pak by po jakémkoli Pepíkově začátku mohl přiřadit tak, aby ho dostal na 14, což je pro Pepíka prohraná pozice. Protože se „prohrané“ pozice pravidelně opakují (po 14) a protože poslední taková pozice je o jedna menší než zvolené hraniční číslo, zvolí $15 + 7 \cdot 14 = 113$.

16. V krychli si vyznačíme všechny vrcholy, všechny středy hran, všechny středy stěn a střed krychle (celkem 27 bodů). Kolik je přímek, které procházejí právě dvěma vyznačenými body?



Řešení: Každé dva body určují přímku. Těchto přímek je $\binom{27}{2} = 351$. V tomto součtu jsou ale také přímky, na kterých leží tři body (každá z nich celkem třikrát). Proto musíme od 351 odečíst trojnásobek počtu přímek, na kterých leží tři body. V každém ze tří směrů (zhora–dolů, zleva–doprava, zepředu–dozadu) leží 9 přímek, na nichž leží tři body. Ve směrech stěnových úhlopříček leží vždy 3 přímky se třemi body, směrů stěnových úhlopříček je 6. V každém ze čtyř směrů tělesových úhlopříček leží jedna přímka, na níž jsou tři body. Počet přímek, na nichž leží 3 body je: $3 \cdot 9 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 49$. Hledaný počet přímek ze zadání je $351 - 3 \cdot 49 = 204$.

17. Sumoslava Pilná našla 2 014 po sobě jdoucích přirozených čísel, která dávala stejný součet jako 2 013 po nich následujících čísel. Které ze Sumoslaviných čísel bylo nejmenší?

Řešení: Nejmenší číslo, které Sumoslava měla, označíme x . Když ke každému z čísel $x + 1, x + 2, \dots, x + 2\,013$ přičteme 2 013 a vše sečteme, dostaneme součet právě těch 2 013 následujících čísel ($2\,013 \times$ přičteme 2 013). To je ale stejné, jako když k součtu čísel $x + 1, x + 2, \dots, x + 2\,013$ přičteme číslo x (to je těch prvních 2 014 čísel). Odtud plyne, že $x = 2\,013^2 = 4\,052\,169$.

18. Sladkomil Tlustý se každý den cestou ze školy stavuje v cukrárně a pokaždé si postupně objednává čtyři zákusky (každý jiný). Kolik různých objednávek může Sladkomil během své školní docházky učinit, je-li nabídka cukrárny stálá a tvoří ji indiánek, laskonka, tiramisu, rakvička (se šlehačkou), žloutkový věneček, punčový řez a kokosová koule? Objednávky čtyř stejných zákusků (například indiánek, laskonka, punčový řez a rakvička), které se liší pořadím, považuje Sladkomil za různé.

Řešení: Čtveřici laskomin z nabídky sedmi druhů lze vybrat $\binom{7}{4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35$ různými způsoby. Každou z nich pak můžeme realizovat $4! = 24$ způsoby. Celkem tedy Sladkomil Tlustý může volit $35 \cdot 24 = 840$ různých objednávek.

19. Urči nejmenší přirozené číslo n , pro které budou mít čísla $x = 64n$ a $y = 112n$ stejný počet dělitelů.

Řešení: Protože $64 = 2^6$ a $112 = 2^4 \cdot 7$, musí být číslo n ve tvaru $2^a \cdot 7^b$. Zároveň, aby čísla x a y měla stejný počet dělitelů, musí platit: $(6 + a + 1)(b + 2) = (4 + a + 1)(1 + b + 2)$, což je splněno pro nejmenší kladná $a = 1$ a $b = 2$ (takže $8 \cdot 3 = 6 \cdot 4$). Číslo $n = 2^1 \cdot 7^2 = 98$.

20. Pro členy posloupnosti přirozených čísel a_n platí následující pravidla:

- a) $a_n = 13$, je-li n dělitelné současně čísly 7 a 11 a zároveň není dělitelné 13;
- b) $a_n = 11$, je-li n dělitelné současně čísly 7 a 13 a zároveň není dělitelné 11;
- c) $a_n = 7$, je-li n dělitelné současně čísly 11 a 13 a zároveň není dělitelné 7;
- d) ve všech ostatních případech je $a_n = 1$.

Jaký je součet prvních 2 014 členů této posloupnosti?

Řešení: Čísel, která jsou současně násobky 7 a 11, je mezi prvními 2 014 čísly celkem 26, z nich ale dvě (1 001 a 2 002) jsou násobky 13. Násobků 7 a 13 je celkem 22, opět ale musíme vyřadit čísla 1 001 a 2 002. Násobků 11 a 13 je celkem 14, i z nich stejná dvě čísla vyřadíme. Součet prvních 2 014 členů posloupnosti tak bude $24 \cdot 13 + 20 \cdot 11 + 12 \cdot 7 + 1\,958 = 2\,574$.