

Reciproké rovnice

Rovnice, která se dá upravit na tvar $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, kde $a_n \neq 0$ a pro jejíž koeficienty a_k ($k = 0, 1, \dots, n-1, n$) platí:

- a) $a_k = a_{n-k}$, se nazývá *reciproká rovnice I. druhu* (kladně reciproká rovnice);
- b) $a_k = -a_{n-k}$ se nazývá *reciproká rovnice II. druhu* (záporně reciproká rovnice, resp. antireciproká rovnice);

Přirozené číslo n určuje *stupeň reciproké rovnice*.

Reciproké rovnice (RR) jsou charakteristické symetričností koeficientů. První koeficient a_n je stejný (popř. opačný) jako absolutní člen a_0 , druhý je stejný (popř. opačný) jako předposlední atd.

Reciproká rovnice sudého stupně (lichý počet členů) má prostřední (lichý) koeficient, ke kterému neexistuje symetrický člen (je vlastně symetrický sám se sebou).

Příklady rovnic: $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$ (reciproká rovnice I. druhu)

$12x^4 - 25x^3 + 25x - 12 = 0$ (reciproká rovnice II. druhu)

Dvě poznámky: Každá RR má člen $a_0 \neq 0$, proto nemají RR nikdy kořen 0. Všimni si, že RR II. druhu sudého stupně má prostřední člen vždy nulový (tento člen musí být sám k sobě opačný).

Řešení reciprokých rovnic I. druhu

1. **Reciproké rovnice sudého stupně** ($n = 2m$; $m \in \mathbb{N}$).

- Vydělíme obě strany rovnice výrazem x^m .
- Z prvního a posledního členu, druhého a předposledního apod. vytkneme jejich koeficient (oba vytýkané koeficienty vždy stejné).
- V rovnici použijeme substituci $y = x + \frac{1}{x}$.
- Při uvedené substituci je: $y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$, $y^3 - 3y = x^3 + \frac{1}{x^3}$, $y^4 - 4y^2 + 2 = x^4 + \frac{1}{x^4}$, atd.
- Dostaneme obecnou rovnici m -tého stupně s neznámou y (stupeň m je oproti n poloviční). Umíme-li řešit tuto rovnici, máme vyhráno (bohužel to vždy nemusí být jednoduché).

2. **Reciproké rovnice lichého stupně** ($n = 2m + 1$; $m \in \mathbb{N}$).

- Tyto rovnice mají vždy kořen $x_1 = -1$.
- Rovnici vydělíme výrazem $(x + 1)$ a dostaneme RR I. druhu sudého stupně $2m$.
- Dál postupujeme podle návodu pro řešení RR sudého stupně.

Poznámka: Jestliže má RR prvního druhu kořen x_1 , pak je jejím kořenem také $\frac{1}{x_1}$.

Řešení reciprokých rovnic II. druhu

- Tyto rovnice mají vždy kořen $x_1 = 1$;
- Rovnici vydělíme výrazem $(x - 1)$ a dostaneme (vždy) RR I. druhu sudého stupně.
- Dál postupujeme podle návodu pro řešení tohoto typu rovnic.