

Mnohočleny a lomené výrazy

Výraz zapsaný ve tvaru $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, kde $n \in N$, $a_n \neq 0$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$ a x je proměnná, se nazývá **mnohočlen (polynom)** o jedné proměnné.

Poznámka: Číslo n je stupeň mnohočlenu, jednotliví sčítanci se nazývají *členy mnohočlenu* a čísla $a_0, a_1, \dots, a_n$ se nazývají koeficienty mnohočlenu.

Při úpravách mnohočlenů lze využít vzorce:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$$

Úpravy mnohočlenů

Upravte a zjednodušte:

a) $(3x+5)^3 =$

b) $(2x^2 - x)^3 =$

c) $(a^2 - 3a - 7) \cdot (a - 2) =$

d) $(2a - 3)^3 - (a + 4)^3 =$

e) $(a^2 - 2a + 3) \cdot (a^2 - 2) =$

f) $(2y - 1)^2 (y + 3)^2 =$

g) $(v^3 - v^2 + v - 1) \cdot (v + 1) =$

h) $(2a - b) \cdot [a(4a + b) + b(a + b)] =$

Dělení mnohočlenů

a) $(2a^3 + 11a^2 - 5a - 24) : (2a - 3) =$

b) $(2a^4 - a^3 - 3a^2 - 2a + 3) : (2a - 3) =$

c) $(4y^3 + 8y^2 + 9y + 9) : (2y + 3) =$

d) $(4s^4 - 3s^3 - 7s^2 + 6s - 2) : (s^2 - 2) =$

e) $(a^6 - a^3 - a^2 + a) : (a^2 - 1) =$

f) $(a^5 + 4a^3 + 3a) : (a^2 + 1) =$

g) $(a^5 + 2) : (a + 1) =$

h) $(a^4 - 7a^2 - 9) : (a - 2) =$

i) $(14x^5 + 4x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x + 5) : (2x^2 - 1) =$

j) $(3a^3 - a + 11) : (a^2 - 8a) =$

k) $(z^3 - 5z^2 + 9z - 1) : (z^2 - 2z + 2) =$

l) $(3a^3 + 6a^2 - 35a + 3) : (2 - a) =$

Rozklad mnohočlenů na součin

Rozložte na součin:

a) $5ax + 15a^2y + 4bx + 12aby$

b) $a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$

c) $14ab^2 + 28a^2b^2 + 49ab^3$

d) $px + 7y - py - 7x$

e) $\frac{1}{16}a^2 + 4a + 64$

f) $\frac{4}{25}a^2 - ab + \frac{25}{16}b^2$

g) $27a^3 + 108a^2b + 144ab^2 + 64b^3$

h) $\frac{8}{125}a^6 - \frac{9}{25}a^4b + \frac{27}{40}a^2b^2 - \frac{27}{64}b^3$

i) $\frac{1}{4}(a-b)^2 - 25$

j) $\frac{9}{64} - \left(a - \frac{1}{4}\right)^2$

k) $(2a-3b)^2 - (3b+4a)^2$

l) $(2a-3)^3 - (a+4)^3$

m) $a^4 + a^3 + a + 1$

n) $a^5 + a^4 - 2a^3 - 2a^2 + a + 1$

Krácení a rozšiřování lomených výrazů

Zjednodušte (zkrat'te) výrazy:

a) $\frac{18x-30}{12x^2-20x}$

b) $\frac{3x^2-3xy}{x^2-y^2}$

c) $\frac{-33xy^2z^4}{11x^2yz^3}$

d) $\frac{12x^2-4xy}{8x^2y}$

e) $\frac{x^2y-2xy+y}{x-1}$

f) $\frac{35+5x+7y+xy}{5+y}$

g) $\frac{x^3+y^3+3xy \cdot (x+y)}{(x+y)^2}$

Sčítání a odčítání lomených výrazů

a) $\frac{x+1}{2x-2} - \frac{x-1}{2x+2} - \frac{4x}{x^2-1} + \frac{x^2+1}{x^2-1} =$

b) $1 - x + x^2 - \frac{x^3}{1+x} =$

c) $3y - \frac{xy+y^2}{2x} =$

d) $\frac{a}{a-b} - \frac{b}{b-a} =$

e) $\frac{1+3x}{1-3x} - \frac{1-3x}{1+3x} =$

f) $\frac{ab-a}{b+1} - \frac{ab+a}{b-1} =$

g) $\frac{30x}{9x^2-1} + \frac{4}{3x-1} - \frac{5}{3x+1} =$

h) $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b} - \frac{a^2-ab+b^2}{a-b} + \frac{2b^3-b^2+a^2}{a^2-b^2} =$

Násobení lomených výrazů

a) $\frac{100xy^2}{27z} \cdot \frac{9z^2}{25x^2y} =$

b) $\frac{(x-1)^2}{6y^3} \cdot \frac{3y^2 \cdot (x+1)}{x-1} =$

b) $\frac{3x^5y^3}{4z} \cdot \left(-\frac{2z^2}{xy^2}\right) \cdot \left(-\frac{z}{6x^2y}\right) =$

c) $\frac{1+3x}{3x-1} \cdot \frac{1-9x^2}{(1+3x)^2} =$

$$d) \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{2x^2-4x+2}{x^2-1} =$$

$$e) \frac{a-1}{a+b+1} \cdot \frac{a^2+2a+1-b^2}{a^2-2a+1} =$$

$$f) \left(5x + \frac{5}{x-2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2-2x+1}\right) =$$

$$g) \frac{1-b^2}{1+a} \cdot \frac{1-a^2}{b^2+b} \cdot \left(1 + \frac{a}{1-a}\right) =$$

Dělení lomených výrazů, složené lomené výrazy

$$a) \frac{50xy^2}{18z} : \frac{75x^2y}{9z^2} =$$

$$b) \frac{x^2-2x+1}{9y^3} : \frac{x-1}{3y^2} =$$

$$c) \left(2-x + \frac{2x^2}{2+x}\right) : \frac{x^2+4}{16y-4x^2y} =$$

$$d) \frac{x^2-y^2}{6x^2y} : \frac{y-x}{12xy^2} =$$

$$e) \frac{2x^2-2xy}{3ax+3ay} : \frac{ay-ax}{x^2-y^2} =$$

$$f) \frac{x^2-y^2}{x^2-3x} : \frac{x^2-2xy+y^2}{3-x} =$$

$$g) \frac{x^2-y^2}{x^2} : (xy-y^2) =$$

$$h) \frac{4x^3}{x^3-y^3} : \frac{2x^3}{x^2-2xy+y^2} =$$

$$i) \frac{x^2+(a+b) \cdot x+ab}{x^2+(c+b) \cdot x+cb} : \frac{x^2-a^2}{x^2-c^2} =$$

$$j) \left(x + \frac{y-x}{1+xy}\right) : \left(1 + \frac{x^2-xy}{1+xy}\right) =$$

$$k) \left[\left(\frac{a+b}{b} - \frac{2a}{a+b}\right) \cdot \left(1 + \frac{b+1}{a} + \frac{b}{a^2}\right)\right] : \frac{a^2+b^2}{a^2b} =$$

$$l) \left[\left(\frac{2}{x+1}\right)^2 - \frac{1}{x+1}\right] : \frac{1}{x+1} =$$

$$m) \frac{\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}}{\frac{a-b}{a+b}} =$$

$$n) \frac{\frac{1}{1-y} - 1}{1 - \frac{1-2y^2}{1-y} + y} =$$

Výpočet neznámé ze vzorce

$$a) V = \frac{1}{3} \pi r^2 v \quad [v, r]$$

$$b) c^2 = a^2 + b^2 \quad [a]$$

$$c) o = 2(a+b) \quad [a]$$

$$d) S = 2(ab+ac+bc) \quad [a]$$

$$e) S = \pi r^2 + \pi r s \quad [s]$$

$$f) v = v_0 - gt \quad [v_0, g]$$

$$g) s = \frac{1}{2} at^2 \quad [a, t]$$

$$h) S = \frac{a+c}{2} \cdot v \quad [v]$$

$$i) F = m \frac{v^2}{r} [r, v]$$

$$j) T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad [l, g]$$

$$k) p + \frac{1}{2} \rho v^2 = K \quad [p, v]$$

$$l) F = \kappa \frac{Mm}{r^2} [m, r]$$

$$m) m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v \quad [v]$$

$$n) V = \frac{\pi v}{6} (3r_1^2 + 3r_2^2 + v^2) [r_1]$$

$$o) \frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) [f]$$

$$p) \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} [R_2]$$

$$r) u = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} [Q_1, Q_2]$$

$$s) t = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2} [m_1]$$

Výsledky cvičení

Úpravy mnohočlenů

a) $27x^3 + 135x^2 + 45x + 125$

b) $8x^6 - 12x^5 + 6x^4 - x^3$

c) $a^3 - 5a^2 - a + 14$

d) $7a^3 - 48a^2 + 6a - 91$

e) $a^4 - 2a^3 + a^2 + 4a - 6$

f) $4y^4 + 20y^3 + 13y^2 - 30y + 9$

g) $v^4 - 1$

h) $8a^3 - b^3$

Dělení mnohočlenů

a) $a^2 + 7a + 8, a \neq \frac{3}{2}$

b) $a^3 + a^2 - 1, a \neq \frac{3}{2}$

c) $2y^2 + y + 3, y \neq -\frac{3}{2}$

d) $4s^2 - 3s + 1, s \neq \pm\sqrt{2}$

e) $a^4 + a^2 - a, a \neq \pm 1$

f) $a^3 + 3a, a \in R (\forall a \in R; a^2 + 1 > 0)$

g) $a^4 - a^3 + a^2 - a + 1 + \frac{1}{a+1}, a \neq -1$

h) $a^3 + 2a^2 - 3a - 6 - \frac{21}{a-2}, a \neq 2$

i) $7x^3 + 2x^2 + 3x + 2 + \frac{6x+7}{2x^2-1}, x \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

j) $3a + 24 + \frac{191a+11}{a^2-8a}, a \neq 0, a \neq 8$

k) $z - 3 + \frac{z+5}{z^2-2z+2}, z^2-2z+2 \neq 0;$

l) $-3a^2 - 12a + 11 - \frac{19}{2-a}, a \neq 2;$

Rozklad mnohočlenů na součin

a) $(5a + 4b) \cdot (x + 3ay)$

b) $(a - b)^2 \cdot (a + b)$

c) $7ab^2 \cdot (2 + 4a + 7b)$

d) $(p - 7) \cdot (x - y)$

e) $\left(\frac{1}{4}a + 8\right)^2$

f) $\left(\frac{2}{5}a - \frac{5}{4}b\right)^2$

g) $(3a + 4b)^3$

h) $\left(\frac{2}{5}a^2 - \frac{3}{4}b\right)^3$

i) $(0,5a - 0,5b + 5) \cdot (0,5a - 0,5b - 5)$

j) $\left(\frac{1}{8} + a\right) \cdot \left(\frac{5}{8} - a\right)$

k) $-6a \cdot (2a + 6b)$

l) $(a - 7)(7a^2 - 3a + 13)$

m) $(a + 1)^2 \cdot (a^2 - a + 1)$

n) $(a + 1)^3 \cdot (a - 1)^2$

Krácení a rozšiřování lomených výrazů

- a) $\frac{3}{2x}, x \neq 0 \wedge x \neq \frac{5}{3}$ b) $\frac{3x}{x+y}, x \neq \pm y$ c) $\frac{3yz}{x}, x, y, z \neq 0$ d) $\frac{3x-y}{2xy}, x, y \neq 0$
- e) $y \cdot (x-1), x \neq 1$ f) $7+x, y \neq -5$ g) $x+y, x \neq -y$

Sčítání a odčítání lomených výrazů

- a) $\frac{x-1}{x+1}, x \neq \pm 1$ b) $\frac{1}{1+x}, x \neq -1$ c) $\frac{5xy-y^2}{2x}, x \neq 0$ d) $\frac{a+b}{a-b}, a \neq b$
- e) $\frac{12x}{1-9x^2}, x \neq \pm \frac{1}{3}$ f) $\frac{-4ab}{b^2-1}, b \neq \pm 1$ g) $\frac{9}{3x-1}, x \neq \pm \frac{1}{3}$ h) $1, a \neq \pm b$

Násobení lomených výrazů

- a) $\frac{4yz}{3x}, x, y, z \neq 0$ b) $\frac{x^2-1}{2y}, y \neq 0 \wedge x \neq 1$ a) $\frac{1}{4}x^2z^2, x, y, z \neq 0$
- b) $-1, x \neq \pm \frac{1}{3}$ c) $2, x \neq \pm 1$ d) $\frac{a+1-b}{a+1}, a \neq 1, a \neq -1-b$
- e) $5x, x \neq 1, x \neq 2$ f) $\frac{1-b}{b}, b \neq 0, b \neq -1, a \neq \pm 1$

Dělení lomených výrazů, složené lomené výrazy

- a) $\frac{yz}{3x}, x, y, z \neq 0$ b) $\frac{x-1}{3y}, y \neq 0 \wedge x \neq 1$ c) $4y \cdot (2-x), y \neq 0 \wedge x \neq \pm 2$
- d) $-\frac{2y \cdot (x+y)}{x}, x, y \neq 0, x \neq y$ e) $\frac{2x \cdot (y-x)}{3a^2}, a \neq 0, x \neq \pm y$
- f) $\frac{x+y}{x \cdot (y-x)}, x \neq 0, x \neq 3, x \neq y$ g) $\frac{x+y}{x^2y}, x, y \neq 0, x \neq y$
- h) $\frac{2 \cdot (x-y)}{x^2+xy+y^2}, x \neq 0, x \neq y$ i) $\frac{x-c}{x-a}, x \neq -b, x \neq \pm a, x \neq -c$

$$j) y, x \neq -\frac{1}{y}$$

$$k) a+1, a, b \neq 0 \wedge a \neq -b$$

$$l) \frac{3-x}{x+1}, x \neq -1$$

$$m) 1, a \neq \pm b$$

$$n) \frac{1}{y}, y \neq 0 \wedge y \neq 1$$

Výpočet neznámé ze vzorce

$$a) v = \frac{3V}{\pi r^2}, r = \sqrt{\frac{3V}{\pi v}}$$

$$b) a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$c) a = \frac{o-2b}{2}$$

$$d) a = \frac{S-2bc}{2(b+c)}$$

$$e) s = \frac{S - \pi r^2}{\pi r}$$

$$f) v_0 = v + gt, g = \frac{v_0 - v}{t}$$

$$g) a = \frac{2s}{t^2}, t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

$$h) v = \frac{2S}{a+c}$$

$$i) r = \frac{mv^2}{F}, v = \sqrt{\frac{Fr}{m}}$$

$$j) l = \frac{T^2 g}{4\pi^2}, g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

$$k) p = K - \frac{1}{2} \rho v^2, v = \sqrt{\frac{2K-2p}{\rho}}$$

$$l) m = \frac{Fr^2}{\kappa M}, r = \sqrt{\frac{\kappa M m}{F}}$$

$$m) v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$n) r_1 = \sqrt{\frac{6V - 3\pi r_2^2 v - \pi v^3}{3\pi v}}$$

$$o) f = \frac{ab}{(n-1)(a+b)}$$

$$p) R_2 = \frac{RR_1 R_3}{R_1 R_3 - RR_1 - RR_3}$$

$$r) Q_1 = \frac{Q_2}{1-u}, Q_2 = Q_1(1-u)$$

$$s) m_1 = \frac{m_2(t_2 - t)}{t - t_1}$$