

Posloupnosti

1. Různým způsobem (rekurentně i jinak) zadané posloupnosti

- 1.1 Urči prvních pět členů posloupnosti, ve které $a_1 = 5$, $a_{n+1} = 2a_n - 4$.
- 1.2 Urči prvních pět členů posloupnosti, je-li dáno: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = -a_n + 5$.
- 1.3 Urči prvních pět členů posloupnosti, je-li dáno: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.
- 1.4 Urči prvních pět členů posloupnosti, je-li dáno: $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n - 2a_{n-1}$.
- 1.5 Urči prvních šest členů posloupnosti, je-li dáno: $a_n = \frac{(-2)^n}{n+1}$.
- 1.6 Urči prvních šest členů posloupnosti, je-li dáno: $a_n = \frac{2+n}{2n}$.
- 1.7 Urči prvních pět členů posloupnosti, je-li dáno: $a_n = \frac{(-2)^{n-1}}{2n-1}$.
- 1.8 Urči prvních pět členů posloupnosti, je-li dáno: $a_n = \frac{n^2 + 2}{3n}$.
- 1.9 Urči prvních šest členů posloupnosti, je-li dáno: $a_2 = 24$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 8$.
- 1.10 Urči prvních šest členů posloupnosti, je-li dáno: $a_5 = 50$, $a_{n+1} = 2a_n - 2$.
- 1.11 Urči prvních pět členů posloupnosti, je-li dáno: $a_2 = 2$, $a_3 = 5$, $a_{n+1} = a_n + 3a_{n-1}$.
- 1.12 Pro n -tý člen posloupnosti platí: $a_n = \frac{1}{1+2n}$. Vypočítej rozdíl $a_5 - a_4$.
- 1.13 Pro n -tý člen posloupnosti platí: $a_n = \frac{(-1)^n}{2n}$. Vypočítej podíl $a_5 : a_4$.
- 1.14 Rozhodni, zda posloupnost, ve které pro n -tý člen platí $a_n = \frac{2n}{1+n}$ je rostoucí nebo klesající.

2. Aritmetická posloupnost

- 2.1 Urči prvních šest členů aritmetické posloupnosti, je-li dáno: $a_4 = 32$, $d = 4,5$.
- 2.2 Urči prvních šest členů aritmetické posloupnosti, je-li dáno: $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{3}$.
- 2.3 Aritmetická posloupnost je dána rekurentně: $a_1 = 21$, $a_{n+1} = a_n + 5$. Urči vzorec pro n -tý člen a_n a vypočítej a_{100} .
- 2.4 Urči první tři členy a diferenci aritmetické posloupnosti, je-li dáno: $a_8 = 30$, $a_{12} = 46$.

- 2.5 V aritmetické posloupnosti platí pro n -tý člen vztah $a_n = 4 + 3(n - 1)$. Zapiš první tři členy této posloupnosti a urči rozdíl $a_{40} - a_{20}$.
- 2.6 Kolikátý člen aritmetické posloupnosti, v níž je $a_1 = 5$, a $d = 3$, se rovná 71?
- 2.7 V aritmetické posloupnosti je $a_7 = 19$, $a_4 - a_2 = 5$. Urči první a desátý člen této posloupnosti a součet prvních deseti členů.
- 2.8 Kolikátý člen aritmetické posloupnosti je roven 110, je-li $a_5 = 19$ a $a_7 = 33$?
- 2.9 Rostoucí aritmetickou posloupnost tvoří po sobě jdoucí lichá přirozená čísla. Průměr prvních devíti členů je 13. Urči první a devátý člen této posloupnosti.
- 2.10 Průměr prvních deseti členů aritmetické posloupnosti s diferencí 4 je roven 25. Urči první a desátý člen této posloupnosti.
- 2.11 Aritmetickou posloupnost tvoří násobky sedmi (7, 14, ...). Jaký je součet prvních deseti členů?
- 2.12 Vypočítej součet všech lichých dvojciferných přirozených čísel.
- 2.13 Urči součet všech trojciferných násobků čísla 7.
- 2.14 Součet prvních dvanácti členů aritmetické posloupnosti je 240. Dále platí, že $a_3 - a_1 = 8$. Urči první, šestý a dvanáctý člen této posloupnosti.
- 2.15 Jaký je součet prvních dvaceti násobků čísla třicet tři ($33 + 66 + 99 + 132 + \dots$)?
- 2.16 V aritmetické posloupnosti je $a_4 = 16$, $a_8 = 24$. Kolik členů je třeba sečíst, aby součet byl 90?
- 2.17 V aritmetické posloupnosti je $a_7 = 140$, $a_{10} = 104$. Pro jaké n nabývá součet s_n největší možné hodnoty? Urči tento součet.
- 2.18 Urči člen a_1 a diferenci d aritmetické posloupnosti, pro kterou platí $s_5 = s_6 = 60$.
- 2.19 Mezi čísla 15 a 27 je vloženo pět čísel tak, že těchto sedm čísel tvoří aritmetickou posloupnost. Urči součet pěti vložených čísel.
- 2.20 Mezi čísla 4 a 37 vlož čísla tak, aby s danými čísly tvořila aritmetickou posloupnost o součtu 246. Urči počet vložených čísel a diferenci takto vytvořené posloupnosti.
- 2.21 V soutěži byly za prvních 5 míst vyplaceny odměny v celkové hodnotě 3 600 Kč. Nejvyšší odměna byla za první místo, za další umístění se odměny postupně snižovaly o 240 Kč tak, že částky tvořily klesající aritmetickou posloupnost. Jaké odměny získali soutěžící na 1. a 2. místě?
- 2.22 Hlediště letního kina má sedadla uspořádána do dvaceti řad. V první řadě je 24 sedadel, v každé následující řadě je o 3 sedadla více. Jaká je kapacita hlediště letního kina?
- 2.23 Železné roury jsou srovnány v 10 řadách nad sebou tak, že vrchní řadu tvoří 12 trubek a každá další řada má o jednu více. Kolik je všech trubek?
- 2.24 Adam se rozhodl, že začne od 1. ledna pravidelně běhat a bude délku své trasy každý den prodlužovat o 150 metrů tak, aby 20. ledna dosáhla jeho trasa rovných 4 000 metrů. Od tohoto dne až do konce měsíce pak bude běhat 4 000 metrů denně. Jakou trasu si má naplánovat na 1. ledna a kolik za leden uběhne celkem kilometrů?
- 2.25 Délky stran pravoúhlého trojúhelníku tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Obvod trojúhelníku je 96 cm. Urči délky jeho stran.
- 2.26 Vypočítej vnitřní úhly šestiúhelníku, tvoří-li velikosti úhlů aritmetickou posloupnost a nejmenší úhel má velikost 70° .
- 2.27 Truhlář má rozřezat laťku 4 m dlouhou na 10 dílů tak, aby každý další díl byl o 6 cm delší než předcházející. Jaké délky budou mít nejkratší a nejdelší díl?

3. Geometrická posloupnost

- 3.1 Geometrická posloupnost je dána prvními dvěma členy: $a_1 = 0,08$; $a_2 = 0,4$. Urči kvocient q , členy a_3 , a_6 a součet prvních šesti členů s_6 .
- 3.2 Urči první a pátý člen geometrické posloupnosti, ve které $a_3 = 3$ a $q = -3$.
- 3.3 Urči první a čtvrtý člen geometrické posloupnosti, ve které $a_2 = 2$ a $q = \sqrt{2}$.
- 3.4 Mezi čísla 8 a 216 vlož dvě čísla tak, aby s danými čísly vytvořila geometrickou posloupnost.
- 3.5 Urči první člen a_1 a kvocient q geometrické posloupnosti, v níž je $a_3 = 18$ a $a_4 = 27$.
- 3.6 Urči první člen a_1 a kvocient q geometrické posloupnosti, v níž je $a_3 = 24$ a $a_6 = -3$.
- 3.7 Urči první člen a_1 a kvocient q geometrické posloupnosti, v níž je $a_4 = -9$ a $a_6 = -4$.
- 3.8 Geometrická posloupnost je dána vzorcem $a_n = 900 \cdot 0,6^{n-1}$. Urči součet prvních pěti členů s_5 .
- 3.9 Mezi čísla 6 a 1 536 byla vložena tři čísla tak, že s danými čísly tvořila geometrickou posloupnost. Urči součet vložených čísel.
- 3.10 Urči součet prvních šesti členů geometrické posloupnosti, ve které $a_1 = 3$; $a_2 = -6$.
- 3.11 Urči součet prvních osmi členů geometrické posloupnosti, ve které $a_1 = 2$; $q = \sqrt{3}$.
- 3.12 Součet prvních n členů geometrické posloupnosti byl pro libovolné sudé n roven nule. První člen posloupnosti je roven 5. Urči kvocient q a jedenáctý člen posloupnosti a_{11} .
- 3.13 Kolikátý člen geometrické posloupnosti s prvním členem $a_1 = 10$ a kvocientem $q = 0,8$ bude první, který bude menší než 1?
- 3.14 Tři čísla, která tvoří aritmetickou posloupnost, mají součet 30. Odečteme-li od prvního 5, od druhého 4 a třetí ponecháme, dostaneme posloupnost geometrickou. Urči obě posloupnosti.
- 3.15 Geometrická posloupnost o šesti členech má součet všech šesti členů roven 63; součet sudých členů má hodnotu 42. Urči tuto posloupnost.
- 3.16 Světelný paprsek ztrácí po průchodu skleněnou deskou desetinu své intenzity. Jaká je intenzita paprsku po průchodu třemi stejnými deskami?
- 3.17 Vypočítej, za jak dlouho by se vklad v bance zdvojnásobil při roční úrokové míře 4,6 %, činí-li daň z úroku 15 %.
- 3.18 Město má 940 000 obyvatel. Jejich počet vzrůstá ročně o 4 %. Za kolik let přesáhne počet obyvatel města jeden milión?

Výsledky

1. Různým způsobem (rekurentně i jinak) zadané posloupnosti

1.1 $a_1 = 5; a_2 = 6; a_3 = 8; a_4 = 12; a_5 = 20.$

1.2 $a_1 = 2; a_2 = 3; a_3 = 2; a_4 = 3; a_5 = 2..$

1.3 $a_1 = 0; a_2 = 1; a_3 = 1; a_4 = 2; a_5 = 3.$

1.4 $a_1 = 2; a_2 = 1; a_3 = -3; a_4 = -5; a_5 = 1.$

1.5 $a_1 = -1; a_2 = \frac{4}{3}; a_3 = -2; a_4 = \frac{16}{5}; a_5 = -\frac{16}{3}; a_6 = \frac{64}{7}.$

1.6 $a_1 = \frac{3}{2}; a_2 = 1; a_3 = \frac{5}{6}; a_4 = \frac{3}{4}; a_5 = \frac{7}{10}; a_6 = \frac{2}{3}.$

1.7 $a_1 = 1; a_2 = -\frac{2}{3}; a_3 = \frac{4}{5}; a_4 = -\frac{8}{7}; a_5 = \frac{16}{9}.$

1.8 $a_1 = 1; a_2 = 1; a_3 = \frac{11}{9}; a_4 = \frac{3}{2}; a_5 = \frac{9}{5}.$

1.9 Pro první člen platí $a_n = 2(a_{n+1} - 8)$, $a_1 = 32; a_2 = 24; a_3 = 20; a_4 = 18; a_5 = 17; a_6 = 16,5.$

1.10 Z rovnosti $a_n = \frac{a_{n+1} + 2}{2}$ určíme členy a_1 až a_4 : $a_1 = 5; a_2 = 8; a_3 = 14; a_4 = 26; a_5 = 50; a_6 = 98.$

1.11 $a_1 = 1; a_2 = 2; a_3 = 5; a_4 = 11; a_5 = 26.$

1.12 Protože $a_4 = \frac{1}{9}$ a $a_5 = \frac{1}{11}$, dostaneme $a_5 - a_4 = \frac{1}{11} - \frac{1}{9} = -\frac{2}{99}.$

1.13 Protože $a_4 = \frac{1}{8}$ a $a_5 = -\frac{1}{10}$, dostaneme $a_5 : a_4 = \frac{1}{8} : \left(-\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{8} \cdot \left(-\frac{10}{1}\right) = -\frac{5}{4}.$

1.14 Posloupnost je rostoucí, $a_{n+1} > a_n$ pro všechna přirozená čísla n .

2. Aritmetická posloupnost

2.1 $a_1 = 18,5; a_2 = 23; a_3 = 27,5; a_4 = 32; a_5 = 36,5; a_6 = 41.$

2.2 Protože $d = a_2 - a_1 = -\frac{1}{6}$, dostáváme $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = \frac{1}{6}, a_4 = 0, a_5 = -\frac{1}{6}, a_6 = -\frac{1}{3}.$

2.3 $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 21 + (n-1) \cdot 8 = 13 + 8n$. Stý člen $a_{100} = a_1 + 99d = 21 + 99 \cdot 8 = 813.$

2.4 Diference $d = 4; a_1 = a_8 - 7d = 30 - 7 \cdot 4 = 2; a_2 = 6; a_3 = 10.$

2.5 $a_1 = 4; a_2 = 7; a_3 = 10.$

Členy a_{20} a a_{40} není nutné počítat, $a_{40} - a_{20} = 20d = 20 \cdot 3 = 60.$ ($a_{20} = 61, a_{40} = 121$)

2.6 Protože $a_n = a_1 + d(n-1)$, je $71 = 5 + 3(n-1) \Rightarrow n = 23.$

2.7 Protože $a_4 = a_2 + 2d$, dostáváme $d = 2,5.$ $a_1 = a_7 - 6d = 19 - 15 = 4; a_{10} = a_1 + d(10-1) = 26,5.$

2.8 Nejprve určíme $d = \frac{(a_7 - a_5)}{2} = 7.$ Protože $a_n = 110 = a_7 + 7(n-7) = 33 + 7n - 49 = 7n - 16,$ dostáváme $n = 18.$

2.9 Průměr je roven prostřednímu z prvních devíti členů: $a_5 = 13, d = 2.$ $a_1 = 5; a_9 = 21.$

2.10 Průměr $\frac{(a_5 + a_6)}{2} = 25 \wedge d = 4 \Rightarrow a_5 = 23, a_6 = 27.$ $a_1 = 7; a_{10} = 43.$

2.11 $s_{10} = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{10(7 + 70)}{2} = 385.$

2.12 Lichých dvojciferných čísel je 45 (nejmenší 11, největší 99). $s_{45} = \frac{45(11+99)}{2} = 2\,250.$

2.13 Trojčiferných násobků sedmi je 128 (nejmenší 105, největší 994).

$$s_{128} = \frac{128(105+994)}{2} = 70\,336.$$

2.14 Protože $a_3 - a_1 = 2d = 8$, difference $d = 4.$ Člen a_1 určíme ze součtu $s_{12} = \frac{12(a_1 + a_{12})}{2} = 240.$

Neboť $a_{12} = a_1 + 11d$, dostáváme $a_1 + a_1 + 44 = 40 \Rightarrow a_1 = -2.$ Dále $a_6 = 18, a_{12} = 42.$

2.15 $s_{20} = \frac{20(33+660)}{2} = 6\,930.$

2.16 Chceme dostat $s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = 90.$ Nejprve určíme $d = (a_8 - a_4) : 4 = (24 - 16) : 4 = 2$ a

vypočítáme $a_1 = a_4 - 3d = 16 - 3 \cdot 2 = 10.$ Do vzorce pro s_n dosadíme za a_1 a d :

$$\frac{n[a_1 + a_1 + (n-1)d]}{2} = \frac{n[20 + (n-1) \cdot 2]}{2} = 90. \text{ Dále řešíme kvadratickou rovnici pro neznámou } n.$$

Jediné kladné řešení je $n = 6.$

2.17 Je třeba najít poslední kladný člen (pak už začne součet klesat). Protože $d = (a_{10} - a_7) : 3 = -12,$ dostáváme se do záporných hodnot pro $a_{19} = -4.$ Největší možný součet je tedy $s_{18}.$ Jelikož

$$a_1 = a_7 - 6d = 212 \text{ a } a_{18} = a_{10} + 8d = 8 \text{ je } s_{18} = \frac{18(212+8)}{2} = 1\,980.$$

2.18 Protože $s_5 = s_6 = 60$, musí být $a_6 = 0$. Nyní vyjádříme s_5 a s_6 : $s_5 = \frac{5(a_1 + a_1 + 4d)}{2} = 60$,
 $s_6 = \frac{6(a_1 + a_1 + 5d)}{2} = 60$. Řešením soustavy rovnic dostaneme $d = -4$, $a_1 = 20$.

2.19 Jednoduché: $17 + 19 + 21 + 23 + 25 = 105$.

2.20 Protože $s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(4 + 37)}{2} = 246$, dostáváme $n = 24$. Vloženo bylo 22 čísel, $d = \frac{33}{23}$.

2.21 Členy a_1 až a_5 tvoří aritmetickou posloupnost, prostřední z nich a_3 se rovná jejich aritmetickému průměru $a_3 = \frac{s_5}{5} = 3\,600 : 5 = 720$. Odměna za první místo je 1 200 Kč, za druhé 960 Kč.

2.22 Ze zadání: $a_1 = 24$, $d = 3$, $n = 20$; $a_{20} = 24 + 19 \cdot 3 = 81$; $s_{20} = \frac{20(24 + 81)}{2} = 1\,050$.

2.23 Ze zadání: $a_1 = 12$, $d = 1$, $n = 10$; $a_{10} = 12 + 9 \cdot 1 = 21$; $s_{10} = \frac{10(12 + 21)}{2} = 165$.

2.24 Podle zadání úlohy je $a_{20} = 4\,000$, $d = 150$. První den má uběhnout $a_1 = 4\,000 - 19 \cdot 150 = 1\,150$ m.
 Za prvních 20 dní Adam uběhne $s_{20} = \frac{20(1\,150 + 4\,000)}{2} = 51\,500$ m, za celý leden 95,5 km.

2.25 Uvážím-li, že $a_1 = a_2 - d$ a $a_3 = a_2 + d$, dostanu $a_2 - d + a_2 + a_2 + d = 3a_2 = 96 \Rightarrow a_2 = 8$. Protože členy a_1 , a_2 a a_3 tvoří aritmetickou posloupnost a zároveň jde o pythagorejskou trojici čísel, platí:
 $(a_2 - d)^2 + a_2^2 = (a_2 + d)^2 \Rightarrow a_2 = 4d \Rightarrow d = 8$. Dostáváme $a_1 = 24$, $a_2 = 32$, $a_3 = 40$.

2.26 Ze zadání: $a_1 = 70$, $n = 6$; $s_n = 720$; $s_6 = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{6(70 + a_n)}{2} = 720$; $a_6 = 170$, $d = 20$. Úhly v šestiúhelníku mají velikosti: 70° , 90° , 110° , 130° , 150° a 170° .

2.27 Nejkratší díl bude mít délku 13 cm, nejdelší 67cm.