

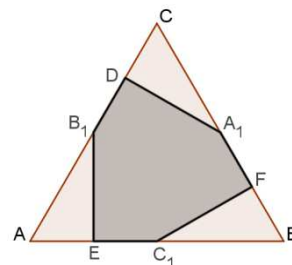
Nácvik na Náboj 2018 (1)

1. Jaká je hodnota výrazu $2\,018 - (2\,017 - 2\,016 + 2\,015 - 2\,014 + \dots + 3 - 2 + 1)$?

Řešení: Výraz v závorce je roven $1\,008 \cdot 1 + 1 = 1\,009$. Dostáváme $2\,018 - 1\,009 = 1\,009$.

2. V rovnostranném trojúhelníku ABC jsou vyznačeny středy stran (A_1, B_1, C_1) a paty kolmic spuštěných z těchto středů ke stranám (body D, E a F) – viz obrázek. Jakou část trojúhelníku ABC pokrývá šestiúhelník $A_1DB_1EC_1F$?

Řešení: Pět osmin.



3. Kolik různých přirozených dělitelů má číslo $2\,017^{2\,018}$?

Řešení: Vzhledem k tomu, že $2\,017$ je prvočíslo, jsou děliteli čísla $2\,017^{2\,018}$ pouze mocniny čísla $2\,017$. Číslo $2\,017^{2\,018}$ má $2\,019$ dělitelů.

4. Najdi největší prvočíslo p , pro které je $2p + 1$ třetí mocninou nějakého přirozeného čísla.

Řešení: Možná vás napadne, že třetí mocninou, kterou lze zapsat jako $2p + 1$ je číslo 27.

Existuje nějaké $p > 13$? Položme $2p + 1 = m^3$, kde m je přirozené číslo a p hledané prvočíslo.

Je zřejmé, že m je liché číslo a lze psát $m = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$). Vyjádříme $2p$: $2p = m^3 - 1 = (m - 1)(m^2 + m + 1) = 2k(4k^2 + 4k + 1 + 2k + 1 + 1) = 2k(4k^2 + 6k + 3)$.

Je tedy $p = k(4k^2 + 6k + 3)$. Protože p je prvočíslo, musí být $k = 1$ a $p = 4 + 6 + 3 = 13$.

5. Vypočítej součet všech čtyřciferných čísel, z nichž každé má dekadický zápis obsahující všechny z číslic 2, 0, 1 a 8.

Řešení: Počet všech čísel, která má smysl uvažovat je $3 \cdot 3! = 18$ (nula nemůže stát na místě tisíců). Každá z číslic 1, 2 a 8 stojí na místě tisíců šestkrát, na místě stovek, desítek a jednotek čtyřikrát: $66\,000 + 4\,400 + 440 + 44 = 70\,884$.

6. Najdi největší násobek čísla 8, v jehož dekadickém zápisu jsou každé dvě cifry různé.

Řešení: 9 876 543 120.

7. Je dán pravidelný sedmnáctiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5A_6 \dots A_{17}$. Přímka p prochází středy stran A_3A_4 a $A_{12}A_{13}$. Kolik úhlopříček daného sedmnáctiúhelníku přímka p protíná?

Řešení: Nejprve rozhodneme, které vrcholy sedmnáctiúhelníku leží v polorovinách oddělených přímkou p . V jedné z polorovin máme body A_4 až A_{12} , v druhé body A_{13} až A_3 .

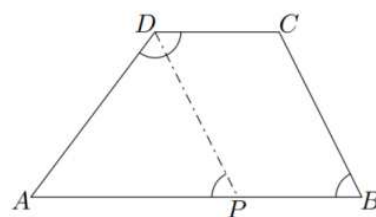
V první polorovině je tedy 9 vrcholů, ve druhé 8 vrcholů daného sedmnáctiúhelníku. Z vrcholů A_4 a A_{12} vychází po sedmi úhlopříčkách, které protíná přímka p , z vrcholů A_5 až A_{11} vychází po osmi úhlopříčkách protnutých přímkou p . Celkový počet úhlopříček sedmnáctiúhelníku, které protíná přímka p , je $2 \cdot 7 + 7 \cdot 8 = 70$.

8. Posloupnost čísel 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12,... je vytvořena z posloupnosti po sobě jdoucích přirozených čísel, v níž byly vynechány násobky pěti. Urči součet prvních 2 018 členů této posloupnosti.

Řešení: Nejprve určíme poslední člen naší posloupnosti. Po každých čtyřech členech chybí v posloupnosti násobek pěti. Těchto čtveřic je celkem $2\,018 : 4 = 504$ (dělení se zbytkem 2). Pokud by násobky pěti nechyběly, končila by posloupnost číslem $5 \cdot 504 + 2 = 2\,522$. Protože součet prvních 2 522 přirozených čísel je $2\,522(1 + 2\,522)/2 = 3\,181\,503$ a protože součet prvních 504 vynechaných násobků pěti je $504(5 + 2\,520)/2 = 636\,300$, součet naší posloupnosti se rovná $3\,181\,503 - 636\,300 = 2\,545\,203$.

9. V lichoběžníku $ABCD$ (se základnami AB a CD) platí: $2|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CDA|$. Dále víme, že $|CD| = 3$ cm a $|DA| = 5$ cm. Urči velikost úsečky AB .

Řešení: V lichoběžníku vyznačme osu úhlu $\sphericalangle CDA$ a označme P její průsečík se stranou AB . $PBCD$ je rovnoběžník a $|PB| = |CD| = 3$ cm. Dále díky rovnosti $|\sphericalangle APD| = |\sphericalangle ADP|$ je trojúhelník APD rovnoramenný (se základnou PD), a tedy $|AP| = |AD| = 5$ cm. Hledanou velikost zjistíme jako $|AB| = |AP| + |PB| = 8$ cm.



10. Součet n ($n > 1$) po sobě jdoucích přirozených čísel je roven 2 018. Jaké je nejmenší možné n ?

Řešení: Protože 2 018 je číslo sudé, je vidět, že čísla nemohou být dvě. Čísla nemohou být ani tři – součet tří po sobě jdoucích čísel by musel být dělitelný třemi, to ale číslo 2 018 není. Pro $n = 4$ dostáváme čtveřici čísel 503, 504, 505 a 506.

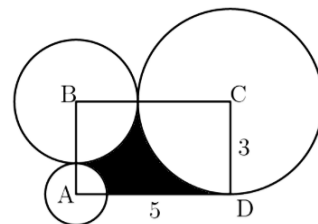
11. V Trojsedmozemi se platí mincemi v hodnotě 3 tse a 7 tse. Urči největší částku, která se nedá pomocí těchto mincí přesně přímo (bez vrácení) zaplatit.

Řešení: Do hodnoty 7 tse umíme zaplatit jen hodnoty 3 tse a 6 tse. Od sedmi nahoru zaplatíme částky dávající po dělení třemi zbytek 0 nebo 1. Od 14 tse výše už zaplatíme všechny částky. Nejvyšší nezaplatitelná částka je 11 tse.

12. K očíslování knih v knihovně přirozenými čísly bylo třeba natisknout právě třikrát tolik cifer, kolik je knih. Urči počet knih v knihovně.

Řešení: Lze snadno ukázat, že počet knih je čtyřciferné číslo. Pro jejich počet x a pro počet cifer zapíšeme rovnici: $9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 + 4 \cdot (x - 999) = 3x$. Odtud $x = 1\,107$.

13. V obdélníku $ABCD$ je $|AB| = 3$ m a $|BC| = 5$ m. Kružnice se středem v bodě A má poloměr 1 m, kružnice se středem v bodě B má poloměr 2 m a kružnice se středem v bodě C má poloměr 3 m, Jaký obsah v metrech čtverečných (zaokrouhleno na celé číslo) má vybarvená plocha (viz obrázek)?



Řešení: $S = 15 - \frac{1}{4}\pi \cdot 1^2 - \frac{1}{4}\pi \cdot 2^2 - \frac{1}{4}\pi \cdot 3^2 = 15 - \frac{14}{4}\pi \doteq 15 - \frac{14}{4} \cdot \frac{22}{7} = 4$ m².

14. Najdi nejmenší prvočíslo, které má ciferný součin 24.

Řešení: 83.

15. Pro kolik přirozených čísel k platí, že $n(6^6, 8^8, k) = 12^{12}$?

Řešení: Protože $12^{12} = 3^{12} \cdot 2^{24}$, musí být číslo k ve tvaru $3^{12} \cdot 2^m$ (Číslo 6^6 obsahuje pouze šestou mocninu tří a $8^8 = 2^{24}$). Možné hodnoty m jsou od 0 do 24, je jich tedy dvacet pět.