

Nácvik na Náboj 2018 (2)

1. Představ si posloupnost násobků čísla tři: 3, 6, 9, 12, 15,... Kolik číslic bude třeba, k zapsání prvních 2 018 členů této posloupnosti?

Řešení: První tři členy posloupnosti jsou jednociferné, následuje 30 dvouciferných členů, 300 trojciferných členů a 1 685 ($2\,018 - 333 = 1\,685$) členů čtyřciferných. Celkem je tedy třeba $3 + 30 \cdot 2 + 300 \cdot 3 + 1685 \cdot 4 = 7\,703$ číslic.

2. Vypočítej součet všech šesticiferných čísel, z nichž každé má dekadický zápis obsahující všechny z číslic 1, 2, 3, 4, 5 a 6.

Řešení: Počet všech čísel, která má smysl uvažovat je $6! = 720$. Na prvním místě (statisíce) se objeví každá z číslic právě 120krát ($5! = 120$). Jednotlivé cifry přispějí k celkovému součtu takto: $120 \cdot 1 \cdot 10^5 + 120 \cdot 2 \cdot 10^5 + 120 \cdot 3 \cdot 10^5 + 120 \cdot 4 \cdot 10^5 + 120 \cdot 5 \cdot 10^5 + 120 \cdot 6 \cdot 10^5 = 21 \cdot 120 \cdot 10^5$. Podobně zahrneme do součtu i sčítance pro číslice na 2.–6. místě:

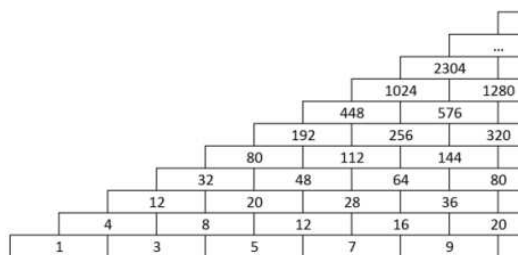
$21 \cdot 120 \cdot 10^4, 21 \cdot 120 \cdot 10^3, 21 \cdot 120 \cdot 10^2, 21 \cdot 120 \cdot 10, 21 \cdot 120 \cdot 1$.

Součet bude: $21 \cdot 120 \cdot (10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 2\,520 \cdot 111\,111 = 279\,999\,720$.

3. Představ si řadu násobků čísla tři napsanou bez mezer: 369121518212427303336... Která číslice bude na 2 018. místě této řady?

Řešení: První tři násobky jsou jednociferné, následuje 30 dvouciferných, 300 trojciferných, další násobky jsou čtyřciferné. Do 2 018. místa zbývá ještě $2\,018 - 963 = 1\,055$ číslic, hledaná číslice bude třetí číslicí 264. čtyřciferného násobku tří, který se rovná $1\,002 + 263 \cdot 3 = 1\,791$. Na 2 018. místě naší řady je číslice 9.

4. V pyramidě jsou ve spodní řadě lichá čísla od 1 do 49. V druhé řadě odspoda je o jedno číslo méně a čísla jsou součty dvou sousedních čísel z nižší řady. Obdobným způsobem jsou vytvořeny další řady pyramidy (viz obrázek). Kolik různých dělitelů má číslo na vrcholu pyramidy?



Řešení: Výška pyramidy je 49 řad. Číslo na vrcholu pyramidy leží nad číslem 25 její základny. Podíváme-li se o dvě řady výše (to platí pro každý blok pyramidy), vidíme, že se tam nachází čtyřnásobek tohoto čísla. K posunu na vrchol je třeba učinit 24 takových kroků, to znamená číslo 25 vynásobit číslem 4^{24} . Číslo na vrcholu lze tedy rozepsat do tvaru $5^2 \cdot 4^{24}$, což ale znamená, že počet jeho dělitelů je $3 \cdot 25 = 75$.

5. Kolikrát je součin čísel $a = 2 \cdot 10^{2\,018}$ a $b = 5 \cdot 10^{2\,017}$ větší než jejich součet?

Řešení: Pro součin dostaneme $a \cdot b = 2 \cdot 10^{2\,018} \cdot 5 \cdot 10^{2\,017} = 10 \cdot 10^{2\,018 + 2\,017} = 10^4\,036$; pro součet $a + b = 2 \cdot 10^{2\,018} + 5 \cdot 10^{2\,017} = 2,5 \cdot 10^{2\,018}$.

Podíl $(a \cdot b) : (a + b) = 10^4\,036 : (2,5 \cdot 10^{2\,018}) = 4 \cdot 10^{2\,017}$.

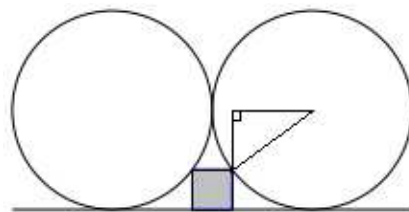
6. Představ si, že budeš psát za sebe postupně sudá přirozená čísla: 2468101214161820... Jaké číslice budou na 2 017. a 2 018. místě?

Řešení: Na začátku zápisu jsou čtyři jednociferná sudá čísla (4 číslice), po nich následuje 45 čísel dvojciferných (90 číslic), 450 trojciferných čísel (1 350 číslic). K jejich zápisu bylo použito celkem 1 444 číslic. Dále následují čtyřciferná sudá čísla. Do 2 016. místa zbývá napsat ještě 572 číslic – to představuje 143 čtyřciferných sudých čísel (1 000 až 1 284). Následuje číslo 1 286, na jehož začátku (na 2 017. místě) je jednička a následovaná dvojkou (čísllice na 2 018. místě).

7. Necht' n je přirozené číslo. Jaké číslice může mít číslo n^2 na místě jednotek, pokud má na místě desítek číslici 7?

Řešení: Položme $n = 10x + y$ pro nějaké celé číslo $x \geq 0$ a hledanou číslici y . Potom bude: $n^2 = 100x^2 + 20xy + y^2$. Číslice na místě desítek je lichá tehdy, pokud desítková číslice y^2 je také lichá. Proto y^2 je 16 nebo 36. Poslední cifra je v obou případech 6.

8. Mezi dvě dotýkající se kružnice o poloměru 10 cm a jejich společnou tečnu byl vepsán čtverec (viz obrázek). Vypočítej obsah tohoto čtverce.



Řešení: Označme x hledanou délku strany čtverce. Doplňme do obrázku pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami délek

$(10 - x)$ a $(10 - \frac{x}{2})$. Podle Pythagorovy věty je $(10 - x)^2 + (10 - \frac{x}{2})^2 = 10^2$. Odtud dostáváme $x = 4$ cm, obsah čtverce je 16 cm^2 .

9. Kolika nulami končí zápis čísla $a = 2\,018! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2\,018$?

Řešení: K nulám v součinu přispívají násobky čísla 5 a čísla sudého (těch je 403), součiny násobků 25 s násobky čtyř (každý přidává k již uvažovaným jednu nulu, takže dostáváme dalších 80 nul), násobky čísla 125 v součinu s násobkem čísla 8 (přičteme 16 nul) a součiny násobků čísla 625 s násobky čísla 16 (připočítáme ještě tři další nuly). Číslo a končí 502 nulami. (WolframAlpha to po dotazu „The Number of Zeros at the End of 2018!“ potvrdí...)

10. Nejkratší ze stran pravoúhlého trojúhelníku měří 23 cm, délky obou zbývajících stran v centimetrech jsou vyjádřeny přirozenými čísly. Jaký obvod má tento trojúhelník?

Řešení: Zadaná strana je odvěsna, můžeme psát $a = 23$. Rozdíl mezi b^2 a c^2 (kde c je délka přepony) musí podle Pythagorovy věty být $c^2 - b^2 = a^2 = 23^2 = 529$. Pro nejkratší odvěsnu s prvočíselnou délkou existuje právě jedna možnost jak doplnit zbývajících strany – přepona je o 1 delší než větší z odvěsen: $c^2 - b^2 = (b + 1)^2 - b^2 = 2b + 1 = 529 \Rightarrow b = 264, c = 265$. Obvod trojúhelníku je $23 + 264 + 265 = 552 \text{ cm}$.