

Nácvik na Náboj 2018 (3)

1. Najdi největší čtyřciferné přirozené číslo, které končí na 18, je dělitelné osmnácti a má ciferný součet 18.

Řešení: 9 018.

2. Urči obsah obdélníku, víš-li, že jeho obvod je 200 m a úhlopříčka má délku $20\sqrt{18}$ m.

Řešení: Označme a, b délky stran obdélníku: $2(a + b) = 200$ a $a^2 + b^2 = 400 \cdot 18 = 7200$.

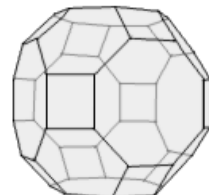
Dále určíme $2ab = (a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 100^2 - 7200 = 2800$ m². Obsah obdélníku je tedy 1400 m². (Úlohu lze řešit i obvyklým způsobem pomocí kvadratické rovnice.)

3. Najdi největší násobek čísla 144, v jehož desítkovém zápisu jsou každé dvě cifry různé a který je menší než 2 018 milionů.

Řešení: 2 017 983 456.

4. Stěny Klářina konvexního mnohostěnu tvoří 12 čtverců, 8 pravidelných šestiúhelníků a 6 pravidelných osmiúhelníků. V každém vrcholu mnohostěnu se setkávají čtverec, šestiúhelník i osmiúhelník. Kolik vrcholů má Klářin mnohostěn?

Řešení: Neboť z každého vrcholu vedou tři hrany, a protože má 12 čtverců, 8 šestiúhelníků a 6 osmiúhelníků celkem $12 \cdot 4 + 8 \cdot 6 + 6 \cdot 8 = 3 \cdot 48$ stran, najdeme na Klářině mnohostěnu (komolý krychloctaedr nebo také velký rombokuboktaedr, v angličtině truncated cuboctahedron) celkem 48 vrcholů.



5. Najdi největší pěticeciferné číslo dělitelné číslem 84 dané vlastnosti: první trojice čísel tvoří číslo, které je třikrát větší než číslo tvořené desítkami a jednotkami (původní pěticeciferné číslo vlastně „přeřízneme“ na dvě části).

Řešení: Pokud označíme trojiciferné číslo jako x (první část pěticeciferného čísla) a dvojiciferné jako y (druhá část), bude hledané pěticeciferné číslo n ve tvaru $100x + y$. Podle zadání má platit $x = 3y$ a je tedy $n = 301y = 7 \cdot 43 \cdot y$. Protože číslo $84 = 7 \cdot 12$, je dělitelem čísla n právě tehdy, když 12 dělí $43y$. Vidíme, že číslo y musí být násobkem 12. Jeho trojnásobek přitom musí být trojiciferný a co největší, proto $y = 96$. Hledané pěticeciferné číslo $n = 28\,896$.

6. Kolik různých přirozených dělitelů má číslo $2\,018^2\,018$?

Řešení: Vzhledem k tomu, že prvočíselný rozklad $2\,018 = 2 \cdot 1\,009$, je dělitelů čísla $2\,018^2\,018$ $2\,019^2 = 4\,076\,361$.

7. Kolika způsoby lze stěny kostky obarvit modrou a žlutou barvou? (Dvě obarvení považujeme za stejná, pokud se dokážeme otočením jednoho z nich dostat na druhé.)

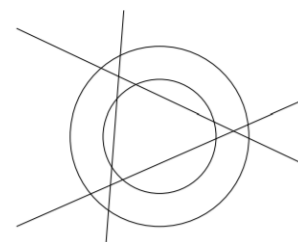
Řešení: 10 způsobů. (Možnosti rozdělíme podle toho, kolik stěn obarvíme modrou barvou. Pro nula máme jednu možnost, stejně tak pro jednu modrou. Pro dvě modré stěny jsou dvě možnosti: buď spolu sousedí, nebo jsou protilehlé. Pro tři stěny jsou opět dvě možnosti: buď mají společný vrchol, nebo jsou dvě protilehlé a třetí s oběma sousedí hranami. Pro čtyři je stejně možností jako pro dvě...)

8. Mám zlomek, v němž je součet čitatele a jmenovatele 2018. Je to přitom největší možný zlomek, který je menší než $\frac{1}{18}$. Urči můj zlomek.

Řešení: Platí $\frac{a}{b} < \frac{1}{18}$ a přitom $a + b = 2018$. Je tedy $b = 2018 - a$ a tedy $\frac{a}{2018-a} < \frac{1}{18}$. Po úpravě $18a < 2018 - a \Rightarrow 19a < 2018 \Rightarrow a < \frac{2018}{19} \Rightarrow a = 106$. Hledaný zlomek je $\frac{106}{1912}$.

9. Na kolik nejvíce částí se dá třemi přímkami rozdělit mezikruží?

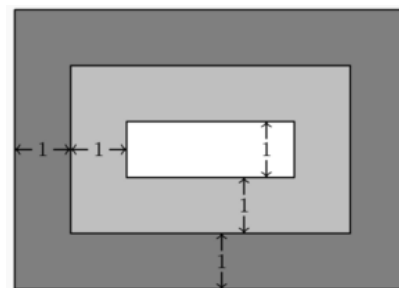
Řešení: Chceme, aby všechny průsečíky přímek byly různé, ležely uvnitř mezikruží a aby každá přímka byla sečnou mezikruží. To se nám podaří, pokud bude vnitřní kružnice něco mezi vepsanou a opsanou kružnicí trojúhelníka, jejíž ohraničují tři přímky. Dostaneme 9 částí.



10. Urči počet sčítanců na pravé straně rovnosti $2^{2018} = 2 + 2 + 2 + \dots + 2$.

Řešení: Na pravé straně rovnosti vytkneme číslo 2. Protože $2^{2018} = 2 \cdot 2^{2017} = 2 \cdot (1 + 1 + \dots + 1)$, musí být v závorce 2^{2017} jedniček, což je i hledaný počet sčítanců.

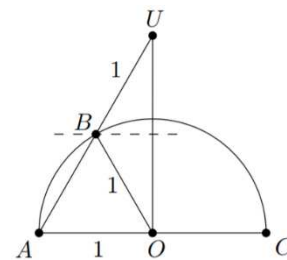
11. Obdélníkový záhon má být rozdělen na tři části způsobem znázorněným na obrázku: vnitřní bílý obdélník je 1 m široký, světle šedivý obdélník má délku i šířku o 2 metry větší než bílý a tmavě šedivý obdélník má délku i šířku o 2 metry větší než světle šedivý obdélník. Přitom tvoří obsahy různých vybarvených ploch aritmetickou posloupnost. Urči obsah tmavě šedivé plochy.



Řešení: Označíme-li délku bílého obdélníku x , je obsah světle šedivé plochy $(x + 2) \cdot 3 - x = 2x + 6$. Obsah tmavě šedivé plochy je $(x + 4) \cdot 5 - (2x + 6) - x = 2x + 14$. Čísla x , $2x + 6$ a $2x + 14$ mají tvořit aritmetickou posloupnost, musí tedy platit: $(2x + 14) - (2x + 6) = (2x + 6) - x$. Řešením je číslo $x = 2$. Obsah je tedy $2x + 14 = 18 \text{ cm}^2$.

12. V rovině je dána kružnice s poloměrem 1, se středem O a průměrem AC . Na kolmici k AC procházející bodem O je vně kružnice zvolen bod U tak, že označíme-li druhý průsečík kružnice s přímkou AU jako B , platí $|BU| = 1$. Určete $|OU|$.

Řešení: Jelikož $|OB| = 1 = |BU|$, je trojúhelník OUB rovnoramenný. Bod B tak leží na ose odvěsny pravoúhlého trojúhelníku AOU a zároveň na jeho přeponě, takže je středem této přepony. Proto i $|AB| = 1$ a pomocí Pythagorovy věty dopočteme $|OU| = \sqrt{3}$.



13. Jaká je hodnota výrazu $2018^2 - 2017^2 + 2016^2 - 2015^2 + \dots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$?

Řešení: Označme S hledaný součet. Členy řady „chytře“ uzavorkujeme a použijeme vzorec pro rozdíl druhých mocnin: $(2018^2 - 2017^2) + (2016^2 - 2015^2) + \dots + (4^2 - 3^2) + (2^2 - 1^2) = (2018 + 2017)(2018 - 2017) + \dots + (4 + 3)(4 - 3) + (2 + 1)(2 - 1) = 2018 + 2017 + \dots + 4 + 3 + 2 + 1 = 2018 \cdot \frac{2019}{2} = 2\,037\,171$.

14. V městečku Jonejone žijí obyvatelé dvou typů: pravdomluvní (ti vždy říkají pravdu) a lháři (ti stále lžou). Dnes se všichni dospělí obyvatelé Jonejone (je jich celkem 2 018) sešli k poradě a sedli si do kruhu. Všichni svorně tvrdí, že jsou pravdomluvní (o čemž lze samozřejmě pochybovat) a že po jejich pravé ruce sedí lhář. Kolik nejvíce lhářů může být mezi těmito lidmi?

Řešení: Předpokládejme, že by vedle sebe seděli dva pravdomluvní či dva lháři. Pak by ten, který sedí v takové dvojici nalevo, prohlásil o člověku po své pravici, že je pravdomluvný. To je ale v rozporu se zadáním – pravdomluvní a lháři se tedy musí střídát. Proto je v kruhu právě 1 009 lhářů.

15. Tři planety K , A a G obíhají kolem hvězdy N po soustředných kružnicových drahách (společný střed kružnic je hvězda N). Pohybují se konstantní rychlostí a mají různé periody oběhu: 60, 84 a 140 roků. Jednou se stalo, že tyto tři planety spolu s hvězdou N ležely na jedné přímce. Kolik nejméně roků musí uplynout, aby K , A , G a N znovu ležely na jedné přímce?

Řešení: Podívejme se nejprve, kdy budou hvězdy K a A znova ležet s N na jedné přímce. Bude to tehdy, když (rychlejší) hvězda K oběhne o polovinu dráhy více než hvězda A , neboli pro počet oběhů x hvězdy A musí platit $60(x + 1/2) = 84x$, z čehož jednoduše plyne $x = 5/4$. Tutéž úvahu provedeme pro hvězdy A a G , kde y označíme počet oběhů hvězdy A za dobu, než se A , G a N znova srovnají do přímky. Dostaneme rovnici $84y = 140(y - 1/2)$ a řešení $y = 5/4$. Jelikož $x = y = 5/4$, tak za dobu, kdy hvězda A oběhne celkem $5/4$ své dráhy, což je 105 roků, budou všechny hvězdy opět na jedné přímce.