

Nácvik na Náboj 2018 (4)

1. Urči součet všech dvouciferných čísel, která jsou trojnásobkem svého ciferného součinu.

Řešení: $15 + 24 = 39$.

2. Najdi největší přirozené číslo, které nelze napsat jako součet druhých mocnin alespoň dvou přirozených čísel (ne nutně různých) větších než 1. Například číslo 22 je možné takto zapsat ($22 = 2^2 + 3^2 + 3^2$), číslo 23 ale vyjádřit nelze.

Řešení: 23.

3. Úsečka spojující vrchol A čtverce $ABCD$ se středem strany BC měří 5 cm. Urči délku úhlopříčky čtverce $ABCD$.

Řešení: Označíme-li délku strany čtverce $ABCD$ jako a , úsečka spojující vrchol A čtverce $ABCD$

se středem strany BC měří $\sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \sqrt{5}\frac{a}{2} = 5$ cm. Odtud $a = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$ cm.

Úhlopříčka čtverce $ABCD$ má tedy délku $u = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{5} = 2\sqrt{10}$.

4. Pro přirozená čísla a a b platí: $a + b = 2\,018$, $a < b$. Přitom při sčítání čísel a a b nedochází k přechodu přes desítku (pokud by byla čísla zapsána pod sebou, sečtou se přímo jednotky s jednotkami, desítky s desítkami a tak dále, aniž by docházelo k převodu jedničky do vyššího řádu). Kolik takových dvojic $[a; b]$ celkem existuje?

Řešení: Pro číslo 2 018 existuje 26 možných dvojic (9 možností pro $b < 2000$ a 17 možností pro $b > 2000$).

5. Urči velikost úhlu, který opíše malá hodinová ručička za 2 018 minut.

Řešení: $2\,018 \cdot \frac{1}{60} \cdot 30^\circ = 1\,009^\circ$.

6. Číslo $x = 15a$ je nejmenší násobek patnácti zapsaný pomocí nul a osmiček. Urči číslo a .

Řešení: Číslo x musí být dělitelné třemi i pěti, proto bude zapsáno pomocí tří osmiček a nuly: 8 880. Proto $a = 8\,880 : 15 = 592$.

7. Do čísla $2*0*1*8$ je třeba za hvězdičky (*) doplnit číslice tak, aby vzniklo sedmíciferné číslo dělitelné číslem 72. Kolik čísel dané vlastnosti lze vytvořit?

Řešení: Poslední trojčíslí bude 128 nebo 168. K doplnění ciferného součtu na násobek devíti máme pro trojčíslí 128 následující možnosti: $0 + 5, 1 + 4, 2 + 3, 3 + 2, 4 + 1, 5 + 0$ (ciferný součet 18) a $5 + 9, 6 + 8, 7 + 7, 8 + 6, 9 + 5$ (ciferný součet 27). Pro trojčíslí 168 existují možnosti $0 + 1, 1 + 0$ (ciferný součet 18) a $1 + 9, 2 + 8, 3 + 7, 4 + 6, 5 + 5, 6 + 4, 7 + 3, 8 + 2, 9 + 1$ (ciferný součet 27). Celkem máme 22 možností, jak požadované číslo vytvořit.

8. Máme dvojčíferné číslo x a číslo y , které vzniklo z čísla x prohozením jeho cifer (číslo x není násobkem deseti). Urči největší číslo x , pro které je $x - y$ druhou mocninou přirozeného čísla.

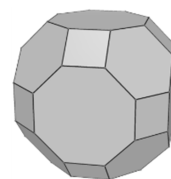
Řešení: Píšeme-li číslo x ve tvaru $x = 10a + b$ ($a > 0, b > 0$), pak je $y = 10b + a$.

Rozdíl $x - y = 10a + b - (10b + a) = 9(a - b)$. Má-li být $9(a - b)$ druhou mocninou přirozeného čísla, musí být i výraz $(a - b)$ také druhou mocninou přirozeného čísla ($9 = 3^2$). Protože $a > b$ a my hledáme největší možné číslo x , připadá v úvahu pouze $a = 9, b = 8$. Dostáváme tedy $x = 98$.

9. Je dána rostoucí posloupnost přirozených čísel 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, ... obsahující všechna přirozená čísla kromě druhých a třetích mocnin. (Chybí tedy čísla 1, 4, 9, 16 atd. a také čísla 8, 27, ...) Které číslo bude na 2 018. místě této posloupnosti?

Řešení: Vzhledem k řídkému zastoupení druhých a třetích mocnin mezi přirozenými čísly hledejme nejbližší vyšší druhou a třetí mocninu k číslu 2 018: $45^2 = 2 025$ a $13^3 = 2 197$. Přitom $1 = 1^2 = 1^3, 64 = 2^6 = 8^2 = 4^3, 729 = 3^6 = 27^2 = 9^3$. K číslu 2 025 máme tedy 45 druhých mocnin a 12 třetích mocnin, z nichž se tři rovnají. Na 2 018. místě naší posloupnosti pak bude číslo $2 018 + 45 + 9 = 2 072$.

10. Stěny Klářina konvexního mnohostěnu tvoří 12 čtverců, 8 pravidelných šestiúhelníků a 6 pravidelných osmiúhelníků. V každém vrcholu mnohostěnu se setkávají čtverec, šestiúhelník i osmiúhelník (viz obrázek). Kolik tělesových úhlopříček má Klářin mnohostěn?



Řešení: Protože má Klářin mnohostěn 48 vrcholů, má $\binom{48}{2} = 1 128$ úseček spojujících jeho vrcholy. Mezi nimi je $48 + 26 - 2 = 72$ hran (podle Eulerovy věty pro konvexní mnohostěny je totiž $v + s - 2 = h$). Dále je třeba odečíst stěnové úhlopříčky: $12 \cdot 2 + 8 \cdot 9 + 6 \cdot 20 = 216$. Klářin mnohostěn má $1 128 - 72 - 216 = 840$ tělesových úhlopříček.

11. Kolik čtyřciferných čísel menších než 2 018 je zapsáno pomocí čtyř různých číslic?

Řešení: Čísel s dvojkou v řádu tisíců je pouze pět. Čísel s jedničkou v řádu tisíců je celkem $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$. Vyhovuje tedy 509 čísel.

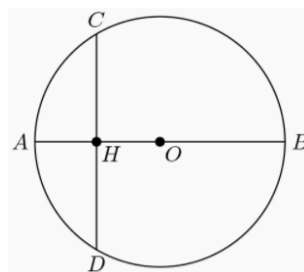
12. Jaký je největší dvouciferný prvočíselný dělitel čísla $\binom{200}{100}$?

Řešení: Úpravou kombinačního čísla dostaneme $\binom{200}{100} = \frac{200!}{100! \cdot 100!}$. Pokud je $10 < p < 100$, potom se p vyskytuje ve jmenovateli dvakrát. Proto potřebujeme, aby se p objevilo jako dělitel v čitateli třikrát, je tedy $3p < 200$. Největší takové prvočíslo je 61, což je řešení naší úlohy.

13. Vypočítej: $(\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7})(-\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7})(\sqrt{5} - \sqrt{6} + \sqrt{7})(\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{7})$.

Řešení: $(\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7})(-\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7})(\sqrt{5} - \sqrt{6} + \sqrt{7})(\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{7}) =$
 $= [(\sqrt{6} + \sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2][(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{6} - \sqrt{7})^2] = (8 + 2\sqrt{42})(2\sqrt{42} - 8) = 168 - 64 = 104$

14. Průměr kružnice AB je dvojciferné přirozené číslo. Tětiva CD kolmá na AB je dvojciferné přirozené zapsané stejnými číslicemi ale v opačném pořadí. Vzdálenost jejich průsečíku H od středu O kružnice vyjadřuje kladné racionální číslo. Urči průměr kružnice.



Řešení: Necht' $|AB| = 10x + y$ a $|CD| = 10y + x$. Potom $|CO| = \frac{10x + y}{2}$ a

$|CH| = \frac{10y + x}{2}$. Podle Pythagorovy věty dostaneme

$$|HO| = \sqrt{\left(\frac{10x + y}{2}\right)^2 - \left(\frac{10y + x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} \cdot 11 \cdot (x - y)(x + y)} =$$

$\frac{3}{2} \sqrt{11 \cdot (x - y)(x + y)}$. Protože $|HO|$ je kladné racionální číslo, musí být odmocnina také racionální číslo. Proto je buď $(x - y) = 11$ nebo $(x + y) = 11$. Platit může pouze druhá možnost a neboť $(x - y)$ musí být druhou mocninou přirozeného čísla, dostaneme dvojici $x = 6$ a $y = 5$. Kružnice má tedy průměr 65.

15. Pro členy posloupnosti přirozených čísel a_n platí následující pravidla:

- a) $a_n = 13$, je-li n dělitelné současně čísly 7 a 11 a zároveň není dělitelné 13;
- b) $a_n = 11$, je-li n dělitelné současně čísly 7 a 13 a zároveň není dělitelné 11;
- c) $a_n = 7$, je-li n dělitelné současně čísly 11 a 13 a zároveň není dělitelné 7;
- d) ve všech ostatních případech je $a_n = 1$.

Jaký je součet prvních 2 018 členů této posloupnosti?

Řešení: Čísel, která jsou současně násobky 7 a 11, je mezi prvními 2 018 čísly celkem 26, z nich ale dvě (1 001 a 2 002) jsou násobky 13. Násobků 7 a 13 je celkem 22, opět ale musíme vyřadit čísla 1 001 a 2 002. Násobků 11 a 13 je celkem 14, i z nich stejná dvě čísla vyřadíme. Součet prvních 2 018 členů posloupnosti tak bude $24 \cdot 13 + 20 \cdot 11 + 12 \cdot 7 + 1\,962 = 2\,578$.