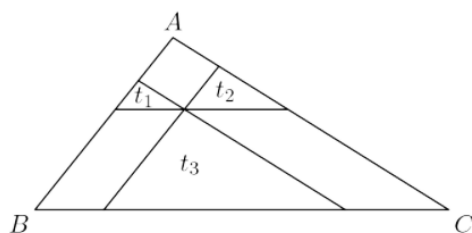


Nácvik na Náboj 2018 (5)

1. Najdi nejmenší prvočíslo, které je pátým členem aritmetické posloupnosti takové, že i všechny čtyři předcházející členy jsou také prvočísla?

Řešení: První člen posloupnosti nemůže být násobkem 2 (resp. 3 ani čtyř), protože by pak jeden z dalších členů byl dělitelný dvěma (resp. třemi nebo čtyřmi). Stačí zvolit $a_1 = 5$, $d = 6$ a dostaneme posloupnost 5, 11, 17, 23, 29.

2. Uvnitř trojúhelníku ABC byl zvolen bod, kterým byly sestaveny úsečky rovnoběžné se stranami (viz obrázek). Tři malé trojúhelníky t_1 , t_2 a t_3 , které takto vznikly, mají obsahy 4 cm^2 , 9 cm^2 a 49 cm^2 . Urči obsah ΔABC .



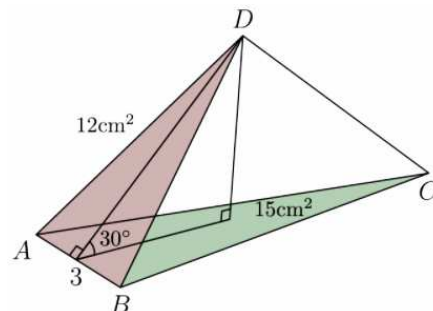
Řešení: Všechny trojúhelníky (t_1 , t_2 , t_3 i ΔABC) jsou podobné podle věty uu. Všimněme si, že délka každé strany ΔABC je rovna součtu délek tří rovnoběžných stran menších trojúhelníků. Délky těchto jejich stran můžeme označit jako $2x$, $3x$ a $7x$. Obsah ΔABC je $12^2 = 144 \text{ cm}^2$.

3. Každá číslice je větší než součet číslic napravo od ní. Najdi největší pěticiferné čísla s touto vlastností.

Řešení: 95 210.

4. Ve čtyřstěnu $ABCD$ hrana AB měří 3 cm. Stěna ABC má obsah 15 cm^2 , stěna ABD obsah 12 cm^2 a úhel mezi těmito stěnami je 30° . Jaký objem má čtyřstěn $ABCD$?

Řešení: Z obsahu stěny ABD snadno určíme výšku na stranu AB , $v_{AB} = 8 \text{ cm}$. Dále vypočteme výšku jehlanu (vzhledem ke stěně ABC) $v_{ABC} = 8 \cdot \sin 30^\circ = 4 \text{ cm}$. Objem čtyřstěnu $ABCD$ je $\frac{1}{3} \cdot 15 \cdot 4 = 20 \text{ cm}^3$.



5. Alice nechce v kině sedět vedle Báry a vedle Cyrila. David nechce sedět vedle Emila. Lístky přitom mají na 5 sousedních sedadel do jedné řady. Kolika pro všechny přijatelnými způsoby si mohou sednout?

Řešení: 16 (Alice je na kraji) + 12 (Alice není na kraji) = 28.

http://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=2017_AMC_10A_Problems/Problem_19

6. Najdi největší přirozené číslo s následující vlastností: Každá dvojice sousedních číslic (bráno zleva doprava) vytváří číslo, které je druhou mocninou přirozeného čísla.

Řešení: Dvouciferná čísla, která jsou druhou mocninou: 16, 25, 36, 49, 64, 81. Nabízejí se následující čísla: 1 649, 25 3 649, 49 649 a 81 649. Poslední z nich je řešením úlohy.

7. Jaké největší přirozené číslo nelze vyjádřit jako součet třetích mocnin přirozených čísel větších než 1?

Řešení: Je zřejmé, že každý násobek čísla 8 lze vyjádřit jako součet třetích mocnin ($2^3 + 2^3 \dots$). Dále $3^3 = 27 = 8 \cdot 3 + 3$ a tedy všechna další čísla ve tvaru $8a + 3$ lze rozepsat jako součet třetích mocnin. Protože $3^3 + 3^3 = 54 = 8 \cdot 6 + 6$, i všechna další čísla ve tvaru $8a + 6$ již lze vyjádřit. Neboť $3^3 + 3^3 + 3^3 = 81 = 8 \cdot 10 + 1$ a $3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 = 108 = 8 \cdot 13 + 4$, umíme zapsat také všechna další čísla ve tvaru $8a + 1$ a $8a + 4$. Dále je $5^3 = 125 = 8 \cdot 15 + 5$, a my tedy dokážeme rozepsat jako součet třetích mocnin také každé další číslo ve tvaru $8a + 5$. Protože $5^3 + 5^3 = 250 = 8 \cdot 31 + 2$, máme možnost rozepsat jakou součet třetích mocnin i každé další číslo ve tvaru $8a + 2$. Tuto možnost ale máme i pro menší čísla počínaje $3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 = 162 = 8 \cdot 20 + 2$.

Zbývá prozkoumat čísla ve tvaru $8a + 7$. Nejmenší takové číslo, které lze vyjádřit jako součet třetích mocnin přirozených čísel větších než 1 je číslo $135 = 3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3$. Hledané číslo je tedy nejvyšším v množině $\{73, 154, 19, 100, 117, 46, 127\}$, jedná se tedy o číslo 154.

8. Z 2 018 studentů matematicko-fyzikální fakulty jich matematiku studuje 80–85 %, fyziku jich studuje 30–40%, někteří studují oba obory. Necht' N je největší možný počet studentů studujících oba obory a n je jejich nejmenší možný počet. Urči rozdíl $N - n$.

Řešení: Studentů matematiky m je: $0,8 \cdot 2\,018 = 1\,614,4 \leq m \leq 0,85 \cdot 2\,018 = 1\,715,3$.

Studentů fyziky f je: $0,3 \cdot 2\,018 = 605,4 \leq f \leq 0,4 \cdot 2\,018 = 807,2$.

Je tedy $1\,615 \leq m \leq 1\,715$ a $606 \leq f \leq 807$.

Hodnotu N dostaneme pro $m = 1\,715$ a $f = 807$. $N = 1\,715 + 807 - 2\,018 = 504$.

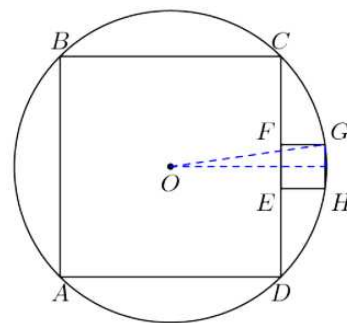
Pro určení n uvažujeme $m = 1\,615$ a $f = 606$, je tedy $n = 1\,615 + 606 - 2\,018 = 203$. Rozdíl $N - n = 504 - 203 = 301$.

9. Urči číslo x , jehož druhá odmocnina je o 18 větší než jeho třetí odmocnina.

Řešení: $x = 729$.

10. Do kružnice byl vepsán čtverec $ABCD$. Menší čtverec $EFGH$ má vrcholy E a F na straně BC a vrcholy G a H na kružnici. Urči poměr mezi obsahem čtverce $ABCD$ a obsahem čtverce $EFGH$?

Řešení: Označme délku strany čtverce $ABCD$ jako $2a$ a délku strany čtverce $EFGH$ jako $2b$. Potom platí pro strany čárkovaného trojúhelníku: $(a + 2b)^2 + b^2 = 2a^2 \Rightarrow a = 5b$. Poměr mezi obsahem čtverce $ABCD$ a obsahem čtverce $EFGH$ je $25 : 1$.



11. Zapišeme-li čísla 1 až 2 018 ve hexadecimální (šestnáctkové) soustavě, obsahují některá z nich nulu. Urči počet těchto čísel.

Řešení: $2018 = 7 \cdot 16^2 + 14 \cdot 16 + 2$. Nula jako první číslice zprava se vyskytuje u všech násobků 16 (těch je celkem 126). Nula jako prostřední číslice trojčíslných čísel, u nichž není nula zcela vpravo, se vyskytuje u čísel ve tvaru $a \cdot 16^2 + 0 \cdot 16 + b$. Pro každé a (a je 1 až 7) nabývá proměnná b vždy 15 různých hodnot (1 až F). Máme tedy $126 + 7 \cdot 15 = 231$ čísel.

12. V kružnici $k(O; \sqrt{50})$ cm jsou sestrojeny úsečky AB (délka 6 cm) a BC (délka 2 cm) tak, že body A a C leží na kružnici a $\sphericalangle ABC = 90^\circ$. Jaký obsah má čtverec o straně OB ?

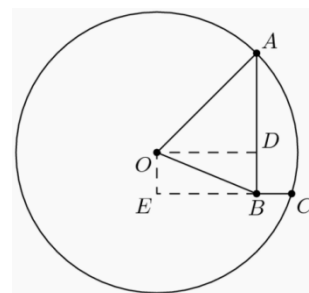
Řešení: Označme $|OE| = |BD| = x$, $|OD| = y$ a hledejme $x^2 + y^2$.

Pomocí Pythagorovy věty dostaneme

a) v trojúhelníku ODA : $(\sqrt{50})^2 = (6 - x)^2 + y^2$;

b) v trojúhelníku OEC : $(\sqrt{50})^2 = x^2 + (y + 2)^2$.

Řešením této soustavy jsou dvojice $x = 1, y = 5$ a $x = 5, y = -7$. Smysl má pouze první z nich a obsah čtverce nad stranou OB je $1^2 + 5^2 = 26 \text{ cm}^2$.



13. Jitka má 30 různě dlouhých špejlí, jejichž délky v centimetrech jsou celá čísla od 1 do 30. Kamila z nich dala stranou špejle dlouhé 3 cm, 7 cm a 15 cm. Kolik různých možností má nyní Jitka, chce-li ze zbývajících špejlí vybrat čtvrtou tak, aby ze všech čtyř pak mohla vytvořit čtyřúhelník?

Řešení: 17 možností

[http://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=2017 AMC 10A Problems/Problem 10](http://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=2017_AMC_10A_Problems/Problem_10)