

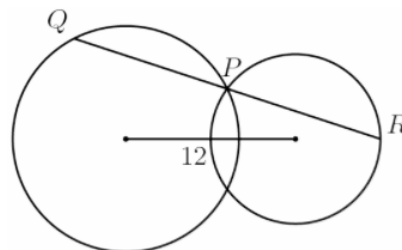
Nácvik na Náboj 2018 (6)

1. Alice nechce v kině sedět vedle Báry a vedle Cyrila. David nechce sedět vedle Emila. Lístky přitom mají na 5 sousedních sedadel do jedné řady. Kolika pro všechny přijatelnými způsoby si mohou sednout?

Řešení: 12 (A je na kraji) + 16 (A není na kraji) = 28 .

http://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=2017_AMC_10A_Problems/Problem_19

2. Středky kružnic o poloměrech 8 cm a 6 cm jsou od sebe vzdáleny 12 cm. Průsečíkem kružnic P prochází přímka tak, že tětivy QP a PR jsou shodné (bod P je středem úsečky QR , viz obrázek). Jaký obsah by měl čtverec o straně QP ?



Řešení: 130.

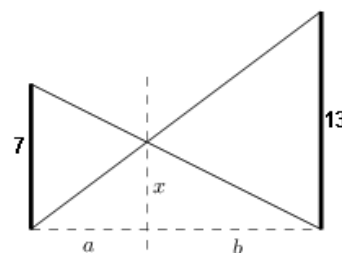
http://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=1983_AIME_Problems/Problem_14

3. U cesty stojí dva sloupy vysoké 13 a 7 metrů. Vršek každého sloupu je spojen napnutým lanem s patou druhého. V jaké výšce se lana protínají?

Řešení: Využijeme podobnost trojúhelníků (viz obrázek): Platí

$\frac{x}{13} = \frac{a}{a+b}$ a současně $\frac{x}{7} = \frac{b}{a+b}$. Protože $\frac{x}{13} + \frac{x}{7} = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1$, dostáváme $x = \frac{91}{20}$.

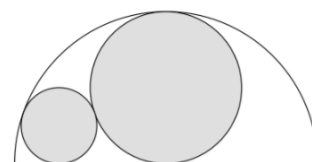
Lana se protínají ve výšce 4,55 m.



4. Čtyřciferné číslo nazveme *symetrické*, pokud má stejnou číslici na místě tisíců i jednotek a číslice na místě stovek se shoduje s číslicí na místě desítek (např. číslo 8 558). Urči největšího společného dělitele všech symetrických čtyřciferných čísel.

Řešení: Vyjádříme symetrické číslo: $1\,000a + 100b + 10b + a = 1\,001a + 110b = 11(91a + 10b)$. Všechna symetrická čísla jsou dělitelná číslem 11.

5. Mějme půlkruh s poloměrem 1 m. Do něho vepíšeme největší kruh, jaký se vejde, a vybarvíme ho šedě. Potom do nešedého zbytku půlkruhu vepíšeme největší kruh, jaký se vejde, tak, aby průnik s šedým kruhem byl nanejvýš jednobodový. Jaký poloměr má malý kruh?



Řešení: 0,25 m. Podrobné řešení viz Náboj 2010, úloha 12 – <https://math.naboj.org/archive.php>.

6. Kolik je $\frac{2\,018! - 2\,017!}{2\,016!}$?

Řešení: $\frac{2\,018! - 2\,017!}{2\,016!} = \frac{2\,018 \cdot 2\,017! - 2\,017!}{2\,016!} = \frac{2\,017!(2\,018 - 1)}{2\,016!} = 2\,017^2 = 4\,068\,289$.

7. Představ si, že budeš psát za sebe postupně sudá přirozená čísla: 2468101214161820... Jaké číslice budou na 2 017. a 2 018. místě?

Řešení: Na začátku zápisu jsou čtyři jednociferná sudá čísla (4 číslice), po nich následuje 45 čísel dvojciferných (90 číslic), 450 trojciferných čísel (1 350 číslic). K jejich zápisu bylo použito celkem 1 444 číslic. Dále následují čtyřciferná sudá čísla. Do 2 016. místa zbývá napsat ještě 572 číslic – to představuje 143 čtyřciferných sudých čísel (1 000 až 1 284). Následuje číslo 1 286, na jehož začátku (na 2 017. místě) je jednička a následovaná dvojkou (čísllice na 2 018. místě).

8. Z množiny přirozených čísel 1 až 2 018 vyberu náhodně tři čísla. Jaká je pravděpodobnost, že součin těchto čísel bude lichý?

Řešení: Pravděpodobnost bude $P = \frac{1\,009}{2\,018} \cdot \frac{1\,008}{2\,017} \cdot \frac{1\,007}{2\,016} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1\,007}{2\,017} = \frac{1\,007}{8\,068}$.

9. Když prodloužíme strany AD a BC konvexního čtyřúhelníku $ABCD$, protnou se v bodě E . Označme H a G postupně středy úhlopříček BD a AC . Najděte poměr obsahů trojúhelníku EHG a čtyřúhelníku $ABCD$. (Tento poměr je stejný pro každý konvexní čtyřúhelník $ABCD$, jehož strany AD a BC nejsou rovnoběžné.)

Řešení: Uvažme čtyřúhelník, v němž se body C a D přibližují, až splynou. Pak je GH střední příčka v trojúhelníku ABC a hledaný poměr obsahů je pak zřejmě 1 : 4.

10. Necht' pro nějaké přirozené číslo n má číslo $a = 110n^3$ celkem 110 přirozených dělitelů (včetně čísla 1 a čísla $110n^3$). Kolik různých přirozených dělitelů má číslo $b = 81n^4$?

Řešení: Číslo a lze zapsat ve tvaru $a = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot n^3$ (má tedy pro $n = 1$ celkem 8 dělitelů). Počet dělitelů musí být násobkem pěti i jedenácti. Toho lze docílit, položíme-li $n = 2^3 \cdot 5$ (číslo a potom má tvar $2^{10} \cdot 5^4 \cdot 11$ a má tedy požadovaných 110 dělitelů). Počet dělitelů čísla $b = 81n^4 = 3^4 \cdot 2^{12} \cdot 5^4$ je roven $5 \cdot 13 \cdot 5 = 325$.

11. Vyjádři hodnotu výrazu $\sqrt{9 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{9 + 6\sqrt{2}}$ co nejjednodušším způsobem.

Řešení: $\sqrt{9 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{9 + 6\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{9 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{9 + 6\sqrt{2}})^2} =$
 $= \sqrt{9 - 6\sqrt{2} + 2\sqrt{9 - 6\sqrt{2}}\sqrt{9 + 6\sqrt{2}} + 9 + 6\sqrt{2}} = \sqrt{18 + 2\sqrt{81 - 72}} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$

12. Číslo $a = 2^6 + 5^4$ lze zapsat jako součin dvou prvočísel $p_1 \cdot p_2$. Urči součet $p_1 + p_2$.

Řešení: Protože $2^6 = 64$ a $5^4 = 625$, musíme najít prvočíselný rozklad čísla $689 = 13 \cdot 53$. Součet $p_1 + p_2 = 66$.

13. Urči ciferný součet čísla $a = 10^{2\,018} - 2\,018$.

Řešení: Po odečtení 2 018 od čísla $10^{2\,018}$ obdržíme číslo zapsané pomocí 2 018 číslic. Pro názornost si nejprve představme příklad $10^6 - 2\,018 = 1\,000\,000 - 2\,018 = 997\,982$. Naše číslo a bude zapsáno pomocí 2 014 devítek a skupiny číslic 7982. Ciferný součet čísla a je:
 $2\,014 \cdot 9 + 7 + 9 + 8 + 2 = 18\,152$.