

Nácvik na Náboj 2018 (7)

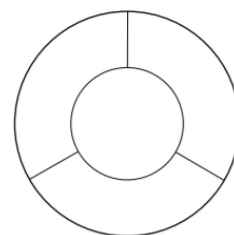
1. Kolik různých trojúhelníků s celočíselnými délkami stran má obvod 13 cm?

Řešení: Nejdelší strana může měřit maximálně 6 cm. Řešení jsou: (6, 6, 1), (6, 5, 2), (6, 4, 3), (5, 5, 3), (5, 4, 4). Je jich tedy pouze pět.

2. Do čísla 2*0*1*8 je třeba za hvězdičky (*) doplnit číslice tak, aby vzniklé sedmiferné číslo bylo dělitelné číslem 72. Jaké nejmenší číslo dané vlastnosti lze vytvořit?

Řešení: 2 001 168.

3. Kruh o poloměru 1 m byl rozdělen na 4 části stejného obsahu způsobem znázorněným na obrázku (kruh a mezikruží rozdělné na tři shodné díly). Jaký poloměr má vnitřní kruh?



Řešení: Vnitřní kruh má čtvrtinový obsah vzhledem k původnímu, jeho poloměr je tedy 0,5 m.

4. Součet druhým mocnin tří po sobě jdoucích lichých přirozených čísel je čtyřciferné číslo, jehož všechny číslice jsou stejné. Najdi všechny takové trojice lichých přirozených čísel

Řešení: Označme prostřední číslo hledané trojice x . Potom je $(x - 2)^2 + x^2 + (x + 2)^2 = y yyy$ (čtyřciferné číslo zapsané pomocí číslice y). Protože $(x - 2)^2 + x^2 + (x + 2)^2 = 3x^2 + 8$ je liché číslo, musí být y také lichá číslice a $3x^2 + 8$ se rovná některému z čísel 1 111, 3 333, 5 555, 7 777, 9 999. Proto je $3x^2$ rovno některému z čísel 1 103, 3 325, 5 547, 7 769, 9 991. Mezi těmito čísly je jediný násobek tří – číslo 5 547. Přirozeným kořenem rovnice $3x^2 = 5 547$ je číslo 43. Zadáni úlohy vyhovuje jediná trojice čísel: 41, 43 a 45.

5. Na planetě X jsou ženaté dvě pětiny mužů a vdané tři pětiny žen. Kolik procent obyvatelstva planety X žije v manželství?

Řešení: Označme p celkový počet sezdaných párů na planetě X. Celkový počet mužů, resp. žen pak lze vyjádřit jako $\frac{5}{2}p$, resp. $\frac{5}{3}p$. Na planetě tedy žije celkem $\frac{5}{2}p + \frac{5}{3}p = \frac{25}{6}p$ lidí, z toho $2p$ je sezdaných. Podíl lidí žijících v manželství je tedy $\frac{2p}{\frac{25}{6}p} = 0,48$. V manželství žije 48 % lidí.

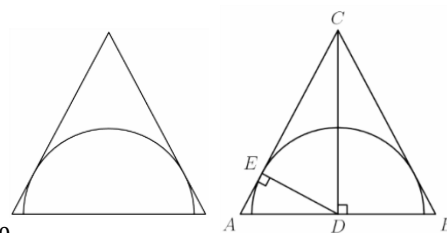
6. Součet 21 po sobě jdoucích lichých čísel je 2 121. Urči největší z těchto čísel.

Řešení: $S_{21} = \frac{21}{2}(a_1 + a_1 + 40) = 2\,121 \Rightarrow 2a_1 = 162 \Rightarrow a_{21} = 81 + 40 = 121$.

7. Do rovnoramenného trojúhelníku se základnou délky 16 cm a výškou 15 cm byla vepsána půlkružnice (viz obrázek). Jaký je její poloměr?

Řešení: Všimněme si, že ramena trojúhelníku mají délku 17 cm (výška, polovina základny a rameno tvoří pythagorejskou trojici 15, 8, 17). Hledaný poloměr půlkružnice znázorníme do trojúhelníku jako DE (viz

obrázek). Z podobnosti trojúhelníků plyne: $\frac{17}{15} = \frac{8}{r} \Rightarrow r = \frac{120}{17}$.



8. Najdi reálné číslo x , aby pro libovolné reálné y bylo splněno: $2\,018xy - 6y + 1\,009x - 3 = 0$.

Řešení:

$$2\,018xy - 6y + 1\,009x - 3 = 1\,009x(2y + 1) - 3(2y + 1) = (1\,009x - 3)(2y + 1) = 0$$

Řešením je tedy zlomek $x = \frac{3}{1\,009}$.

9. Najdi nejmenší kladné číslo složené pouze z nul a jedniček, které je dělitelné 225.

Řešení:

Číslo musí být dělitelné 9 a 25 ($225 = 9 \cdot 25$). Je kladné, není tedy složené jen ze samých nul, a proto obsahuje alespoň jednu jedničku. Ciferný součet musí být dělitelný 9, takže jich je alespoň 9. Z dělitelnosti 25 plyne, že číslo končí jedním z dvojčíslic {00, 25, 50, 75}, vyhovuje pouze 00. Hledané číslo je 11 111 111 100.

10. V čtyřúhelníku $ABCD$ je $|AB| = |BC| = |CD|$, $|\sphericalangle ABC| = 70^\circ$ a $|\sphericalangle BCD| = 170^\circ$. Urči $|\sphericalangle DAB|$.

Řešení: Označme průsečík osy úhlu ABC se stranou AD jako P . Čtyřúhelník $ABCP$ je deltoid, protože $|AB| = |BC|$. Obdobně pro čtyřúhelník $BCDP$. $|\sphericalangle DAB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BCD| = 85^\circ$.

11. Kolik přirozených dělitelů má číslo 20 182 018, víš-li, že je dělitelné číslem 37?

Řešení: $20\,182\,018 = 2\,018 \cdot 10\,001 = 2 \cdot 1\,009 \cdot 73 \cdot 137$. Číslo 20 182 018 má 16 dělitelů.

$D = \{1, 2, 73, 137, 146, 274, 1\,009, 2\,018, 10\,001, 20\,002, 73\,657, 138\,233, 147\,314, 276\,466, 10\,091\,009, 20\,182\,018\}$