

Nácvik na Náboj 2018 (9 – řešení)

1. Po vynásobení čtyřciferného přirozeného čísla čtyřmi vzniklo číslo zapsané stejnými číslicemi v opačném pořadí. Urči původní číslo.

Řešení: 2 178

2. Kája má kus dřevěné desky tvaru rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka se stranami délky 1 m, 1 m a $\sqrt{2}$ m. Chce ho rozříznout jedním řezem na dva kusy se stejným obsahem. Urči délku nejkratšího možného takového řezu.

Řešení: $\sqrt{\sqrt{2} - 1}$ m. Podrobné řešení viz Náboj 2010, úloha 23.

3. Ve čtvercové tabulce prvních 100 přirozených čísel (10×10), seřazených podle velikosti (viz obrázek) vyberu deset čísel tak, aby v mém výběru bylo právě jedno číslo z každého řádku a právě jedno číslo z každého sloupce. Přitom se budu snažit o to, aby součet takto vybraných čísel byl co největší. Jakého největšího součtu mohu dosáhnout?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Řešení: Součet čísel v prvním řádku je roven 55. Nahradím-li jedno z čísel prvního řádku číslem z druhého řádku nacházejícím se pod ním (potřebuji do výběru postupně zahrnout čísla ze všech sloupců), součet se zvýší o 10. Dále při nahrazení čísla z prvního řádku číslem z 3. řádku součet vzroste o 20 atd. Celkem se tedy součet zvýší o $10 + 20 + \dots + 90 = 450$. To znamená, že při jakémkoli výběru provedeném podle pravidel dostanu součet 505.

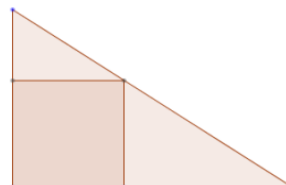
4. Petr a Radek hrají následující hru. Mají hromádku s n zápalkami a střídají se v tazích. Každý musí ve svém tahu odebrat z hromádky kladný počet zápalek nepřevyšující polovinu zápalek na hromádce. Ten, kdo bude mít před sebou jen jednu zápalku a nebude tedy moci provést svůj tah, prohraje. Když víte, že Petr začíná a má před sebou hromádku s 2 018 zápalkami, porad'te mu, kolik zápalek má odebrat, aby dostal Radka do prohrané pozice. (Ta samozřejmě nezávisí na tom, jak dobře Radek hraje.)

Řešení: Pozici nazveme vyhrávající, když existuje vyhrávající strategie pro hráče, který je na tahu. Ostatní pozice jsou prohrávající. Hledáme tedy prohrávající pozici nejbližší číslu 2018. Pro $n = 1$ je pozice prohraná (nelze odebrat žádnou zápalku). Pro $n = 2$ je pozice vyhraná (odebereme jednu zápalku). Pro $n = 3$ je pozice prohraná (musíme odebrat jednu zápalku a soupeře dostáváme do vyhrané pozice). Pro n od 4 do 6 je pozice vyhraná (soupeře pošleme do pozice $n = 3$). Následuje prohraná pozice $n = 7$. Snadno nahlédneme, že další prohrané pozice jsou $n = 15, 31, 63$, atd. tedy pozice $n = 2^k - 1$. Nejbližší nižší prohraná pozice k číslu 2 018 je pro $n = 1 023$. Petr tedy musí odebrat 995 zápalek.

5. Aritmetický průměr pěti různých celých čísel je 2 018. Když Vendelín vynechal nejmenší z nich, byl aritmetický průměr čtyř zbývajících 2 516. Jaké číslo vynechal?
- Součet pěti původních čísel je $5 \cdot 2018 = 10\,090$, součet čtyř zbývajících je $4 \cdot 2\,516 = 10\,064$, tedy o 26 menší $\Rightarrow$ Vendelín vynechal číslo 26.

6. Jaký je obsah čtverce vepsaného do pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami 40 cm a 60 cm?

Řešení: Z podobnosti trojúhelníků vyplývá, že strana čtverce měří $40 \cdot 60 / (40 + 60) = 24$ cm; obsah čtverce je 576 cm^2 .



7. Pro členy posloupnosti přirozených čísel a_n platí následující pravidla:
- a) $a_n = 13$, je-li n dělitelné současně čísly 7 a 11 a zároveň není dělitelné 13;
 - b) $a_n = 11$, je-li n dělitelné současně čísly 7 a 13 a zároveň není dělitelné 11;
 - c) $a_n = 7$, je-li n dělitelné současně čísly 11 a 13 a zároveň není dělitelné 7;
 - d) ve všech ostatních případech je $a_n = 1$.

Jaký je součet prvních 2 018 členů této posloupnosti?

Řešení: Čísel, která jsou současně násobky 7 a 11, je mezi prvními 2 018 čísly celkem 26, z nich ale dvě (1 001 a 2 002) jsou násobky 13. Násobků 7 a 13 je celkem 22, opět ale musíme vyřadit čísla 1 001 a 2 002. Násobků 11 a 13 je celkem 14, i z nich stejná dvě čísla vyřadíme. Součet prvních 2 018 členů posloupnosti tak bude $24 \cdot 13 + 20 \cdot 11 + 12 \cdot 7 + 1\,962 = 2\,578$.

8. Sumoslava Pilná našla 2 018 po sobě jdoucích přirozených čísel, která dávala stejný součet jako 2 017 po nich následujících čísel. Které ze Sumoslaviných čísel bylo nejmenší?

Řešení: Nejmenší číslo, které Sumoslava měla, označíme x . Když ke každému z čísel $x + 1, x + 2, \dots, x + 2\,017$ přičteme 2 017 a vše sečteme, dostaneme součet právě těch 2 017 následujících čísel ($2\,017 \times$ přičteme 2 017). To je ale stejné, jako když k součtu čísel $x + 1, x + 2, \dots, x + 2\,017$ přičteme číslo x (to je těch prvních 2 017 čísel). Odtud plyne, že $x = 2\,017^2 = 4\,068\,289$.

9. Urči nejmenší přirozené číslo n , pro které budou mít čísla $x = 64n$ a $y = 112n$ stejný počet dělitelů.

Řešení: Protože $64 = 2^6$ a $112 = 2^4 \cdot 7$, musí být číslo n ve tvaru $2^a \cdot 7^b$. Zároveň, aby čísla x a y měla stejný počet dělitelů, musí platit: $(6 + a + 1)(b + 2) = (4 + a + 1)(1 + b + 2)$, což je splněno pro nejmenší kladná $a = 1$ a $b = 2$ (takže $8 \cdot 3 = 6 \cdot 4$). Číslo $n = 2^1 \cdot 7^2 = 98$.

10. Číslo $a = 2^6 + 5^4$ lze zapsat jako součin dvou prvočísel $p_1 \cdot p_2$. Urči součet $p_1 + p_2$.

Řešení: Protože $2^6 = 64$ a $5^4 = 625$, musíme najít prvočíselný rozklad čísla $689 = 13 \cdot 53$. Součet $p_1 + p_2 = 66$.

11. Číslo 2 018 lze zapsat jako součet dvou čtverců $a^2 + b^2$. Urči čísla a a b .

Řešení: Druhé mocniny přirozených čísel mají na místě jednotek jednu z číslic 0, 1, 4, 5, 6 a 9. Číslici 8, kterou končí číslo 2 018, lze tedy získat pouze jako součet dvou čtyřek nebo součet dvou devítek. V prvním případě uvažujeme čísla a a b končící dvojkami. Z čísel 2, 12, 22, 32 a 42 ale nelze vytvořit dvojici čísel a a b , pro kterou platí $a^2 + b^2 = 2\,018$. Ve druhém případě mohou čísla a a b končit trojkami nebo sedmičkami. Z čísel 3, 13, 23, 33, 43, 7, 17, 27 a 37 vyhovují zadání úlohy pouze čísla 13 a 43, dostáváme: $13^2 + 43^2 = 2\,018$.

12. Urči ciferný součet čísla $a = 25^{64} \cdot 32^{25}$.

Řešení: Neboť $a = 25^{64} \cdot 32^{25} = 5^{128} \cdot 2^{125} = 5^3 \cdot 5^{125} \cdot 2^{125} = 125 \cdot 10^{125}$, je ciferný součet čísla a roven 8.

13. Do kružnice je vepsaný šestiúhelník $ABCDEF$, pro který platí:

$$|AB| = |CD| = |EF| = 2|BC| = 2|DE| = 2|AF| \text{ a } |AD| = 10 \text{ cm.}$$

Urči obvod šestiúhelníku $ABCDEF$.

Řešení: Protože vnitřní úhly šestiúhelníku $ABCDEF$ jsou všechny 120° (vznikne jakoby rovnoměrným roztažením tří nesousedních stran pravidelného šestiúhelníku). Vezměme lichoběžník $ADEF$, jehož úhly jsou 60° , 60° , 120° a 120° . Lichoběžník $ADEF$ rozdělit na pět shodných rovnostranných trojúhelníků se stranami délky $|DE|$, z nichž tři mají svou stranu na $|AD|$. Proto $|AD| = 3|DE|$ a $|DE| = \frac{10}{3}$.

Obvod šestiúhelníku je $|AB| + |CD| + |EF| + |BC| + |DE| + |AF| = 9|DE| = 9 \cdot \frac{10}{3} = 30 \text{ cm}$.