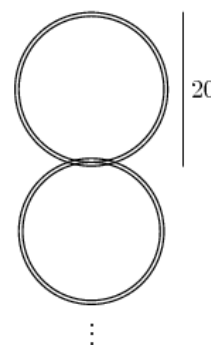


Nácvik na Náboj 2018 (8)

1. Součin čtyř po sobě následujících přirozených čísel je 143 640. Urči nejmenší z čísel.

Řešení: Rozložme číslo 143 640 na součin prvočinitelů: $143\,640 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$. Jedno z čísel je 19, díky dělitelnosti pěti, je v součinu i číslo 20 a díky dělitelnosti sedmi i číslo 21. Zbývající činitele z rozkladu dávají číslo 18, které je i nejmenší z čísel.

2. Dvanáct propojených kroužků (každý 1 cm silný) visí na věšáku. Horní kroužek má vnější průměr 20 cm. Vnější průměr každého z kroužků je vždy o 1 cm menší, než kroužku nad ním. Jaká je vzdálenost nejvyššího bodu horního kroužku a nejnižšího bodu dolního kroužku?



Řešení: Vzdálenost je 152 cm.

3. Deska tvaru kvádrů s délkami hran 1 cm, x cm a $2x$ cm má povrch $1\,978\text{ cm}^2$. Urči číslo x .

Řešení: Povrch kvádrů s hranami délek a , b , c je $S = 2ab + 2ac + 2bc$. Po dosazení dostaneme: $1\,978 = 2x + 4x + 4x^2$, po úpravě $2x^2 + 3x - 989 = 0$. Tato rovnice má dvě řešení: $x_1 = 21,5$ a $x_2 = -23$, smysl má pochopitelně jen první z nich.

4. Vypočítej hodnotu výrazu:
- $$\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} \cdot \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}} \cdot \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{7}}{\frac{1}{7} - \frac{1}{8}} \cdot \dots \cdot \frac{\frac{1}{2\,014} - \frac{1}{2\,015}}{\frac{1}{2\,015} - \frac{1}{2\,016}} \cdot \frac{\frac{1}{2\,016} - \frac{1}{2\,017}}{\frac{1}{2\,017} - \frac{1}{2\,018}}.$$

Řešení: Výraz upravíme $\frac{\frac{3-2}{4-3}}{\frac{2-3}{4-3}} \cdot \frac{\frac{5-4}{6-5}}{\frac{4-5}{6-5}} \cdot \frac{\frac{7-6}{8-7}}{\frac{6-7}{8-7}} \cdot \dots \cdot \frac{\frac{2\,015-2\,014}{2\,016-2\,015}}{\frac{2\,016-2\,015}{2\,017-2\,016}} \cdot \frac{\frac{2\,017-2\,016}{2\,018-2\,017}}{\frac{2\,018-2\,017}{2\,019-2\,018}} = \frac{2\,018}{2} = 1\,009.$

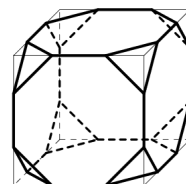
5. Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$ a uvnitř něho rovnostranný trojúhelník ABX . Urči velikost úhlu CEX .

Řešení: $|\sphericalangle EAX| = 108^\circ - 60^\circ = 48^\circ$. Protože $|AE| = |AX|$, je trojúhelník EAX rovnoramenný. Proto $|\sphericalangle AEX| = (180^\circ - 48^\circ) : 2 = 66^\circ$. Odtud $|\sphericalangle CEX| = 108^\circ - 36^\circ - 66^\circ = 6^\circ$.

6. Najdi největší možné přirozené číslo n , pro které $2^n | (3^{128} - 1)$.

Řešení: $3^{128} - 1 = (3^{64} - 1)(3^{64} + 1) = (3^{32} - 1)(3^{32} + 1)(3^{64} + 1) = (3 - 1)(3 + 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1)(3^{16} + 1)(3^{32} + 1)(3^{64} + 1)$. Číslo 3^{2k} dává po dělení 4 zbytek 1 (zkus si to promyslet, můžeš využít kongruencí), proto $3^{2k} + 1$ dá po dělení čtyřmi zbytek 2, je tedy dělitelné dvěma, ale čtyřmi už ne. První dvě závorky dodají do součinu $8 = 2^3$, každá další závorka přidá právě jednu dvojku, řešení je $n = 9$.

7. Každý z osmi vrcholů krychle byl odříznut tak, že povrch vytvořeného tělesa tvoří šest pravidelných osmiúhelníků a osm rovnostranných trojúhelníků (vznikla tzv. „osekaná krychle“ – viz obrázek). O kolik procent (zaokrouhli na celá procenta) se tímto způsobem zmenšil povrch tělesa?



Řešení: Původní povrch byl $6a^2$. Z každého čtverce zůstal osmiúhelník s obsahem $\frac{7}{9}a^2$, $6 \cdot \frac{7}{9}a^2 = \frac{14}{3}a^2$. Strana nově vytvořených rovnostranných trojúhelníků má délku $\frac{a}{3}$, obsah každého z nich je $\frac{\sqrt{3}a^2}{36}$ a všech osm přispívá k celkovému povrchu hodnotou $\frac{2\sqrt{3}a^2}{9}$. Povrch osekane krychle je $\left(\frac{14}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)a^2 \approx 0,84a^2$. Povrch se tedy zmenšil přibližně o 16 %.

8. Kolik přirozených čísel menších než 2 018 lze zapsat jako rozdíl druhých mocnin přirozených čísel?

Řešení: Přirozené číslo x , které lze vyjádřit požadovaným způsobem můžeme zapsat jako: $x = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Všimněme si, že čísla $a - b$ i $a + b$ jsou obě buď lichá, nebo obě sudá. Pro $x = 4n - 2 = 2(2n - 1)$ by výrazy $(a - b)$ a $(a + b)$ měly mít opačnou paritu, což nelze. Pro liché $x = 2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2$, pro násobky čtyř $x = 4n = (n + 1)^2 - (n - 1)^2$. Z lichých čísel nelze vyjádřit číslo 1, z násobků čtyř číslo 4. Čísel ve tvaru $x = 4n - 2$ menších než 2 018 je 504, vyhovuje tedy $2\,017 - 504 - 2 = 1511$ čísel.

9. V rovnoramenném lichoběžníku mají základny délky 8 cm a 18 cm. Navíc se tomuto lichoběžníku dá vepsat kružnice. Jaký je její poloměr?

Řešení: Daný lichoběžník je tečnový, z čehož lze odvodit, že jeho ramena měří 13 cm. Odtud už je jen kousek ke zjištění, že jeho výška je 12 cm a hledaný poloměr vepsané kružnice je 6 cm.

10. Kolik existuje čtyřciferných čísel $abcd$ (zapsaných pomocí čtyř různých cifer a, b, c a d) takových, že pro jejich cifry platí $0 < a < b < c < d \leq 9$?

Řešení: Vezměme si množinu čísel $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Z každé vybrané čtveřice z této množiny umíme poskládat právě jedno číslo $abcd$, které splňuje podmínky úlohy. Proto je počet vyhovujících čísel $abcd$ roven počtu možností, jak z devítiprvkové množiny vybrat čtyřprvkovou podmnožinu. Výsledek je $\binom{9}{4} = 126$.

11. Nad přeponou DO pravoúhlého trojúhelníku DOM leží zvenku čtverec $DINO$. Urči $|MI|$, je-li $|MD| = 6$ cm a $|MO| = 8$ cm.

Řešení: $|MI| = 2\sqrt{58}$ cm

