

Nácvik na náboj - závěrečný

1. Žáci, kteří uspěli u přijímací zkoušky, získali průměrně 65 bodů. Průměrný počet bodů u neúspěšných uchazečů byl 35. Kolik procent žáků uspělo u přijímaček, jestliže průměr za všechny uchazeče byl 53 bodů?

Řešení: Přijatí žáci (označme jejich počet p) získali celkem $65p$ bodů, nepřijatí žáci (počet n) získali $35n$ bodů. Všichni uchazeči měli dohromady $65p + 35n = 53(n + p)$ bodů.

Dostáváme: $12p = 18n \Rightarrow p = \frac{3}{2}n \Rightarrow \frac{p}{p+n} = 0,6$. Přijato bylo 60 % uchazečů.

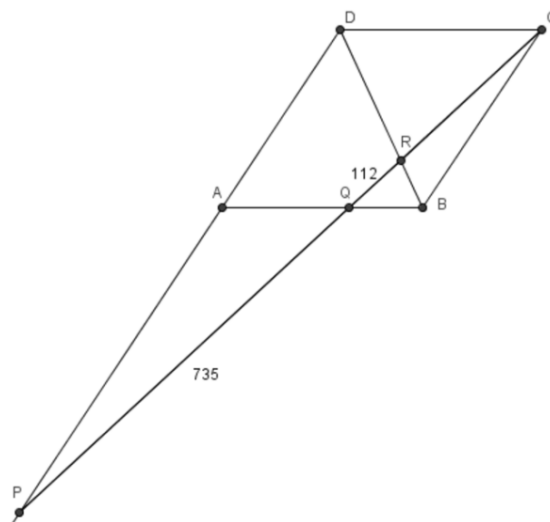
2. Jakou číslici má na místě jednotek číslo $2\,018^{2\,018}$?

Mocniny čísla 2 018 končí postupně číslicemi 8, 4, 2, 6, 8, 4, ... (číslí se stále opakují tak, že u n -té mocniny je na místě jednotek osmička pro $n = 4k - 3$ ($k \in \mathbb{N}$), čtyřka pro $n = 4k - 2$, dvojka pro $n = 4k - 1$ a šestka pro $n = 4k$. Protože číslo 2 018 je ve tvaru $4k - 2$, je číslicí na místě jednotek čtyřka.

3. Je dán rovnoběžník $ABCD$. Na polopřímce DA leží bod P tak, že polopřímka PC protíná stranu AB v bodě Q a úhlopříčku BD v bodě R . Necht' dále platí: $|PQ| = 735$ mm a $|QR| = 112$ mm. Urči $|RC|$.

Řešení: Všimněme si, že $\frac{112}{|RC|} = \frac{|BR|}{|DR|}$ a $\frac{|RC|}{847} = \frac{|BR|}{|DR|}$.

Odtud: $|RC|^2 = 847 \cdot 112 = 7 \cdot 121 \cdot 7 \cdot 16 = 308^2 \Rightarrow |RC| = 308$ mm.



4. Miloš dostane na zkoušce 10 otázek, na které lze odpovídat pouze ANO nebo NE. Test je připraven natolik fikaně, že odpoví-li Miloš na libovolných pět otázek ANO a na zbylých pět otázek NE, bude mít vždy alespoň čtyři správné odpovědi. Zjistěte, kolika způsoby lze takovýto test připravit?

Řešení: Jistota čtyř správných odpovědí znamená, že je buď aspoň devět odpovědí ANO, nebo aspoň devět odpovědí NE. Možností, jak dát za sebe devětkrát ANO a jednou NE, je 10, analogicky je 10 možností s devíti NE. Ještě musíme připočíst možnost všech desíti ANO a možnost všech desíti NE. Dohromady $10 + 10 + 1 + 1 = 22$.

5. Najdi nejmenší přirozené číslo n , pro které je součin jeho cifer 60.

Řešení: Protože $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, číslo n musí být trojciferné. Číslo $n = 256$.

6. Obsah pláště pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$, jehož podstavná hrana měří 10 cm je roven dvojnásobku obsahu podstavy. Urči výšku jehlanu $ABCDV$.

Řešení: Protože obsah jedné boční stěny musí být polovinou obsahu podstavy, je výška v tomto trojúhelníku 10 cm. Odtud dostaneme výšku jehlanu $v = 5\sqrt{3}$ cm.

7. Urči největší přirozené číslo n , pro které existuje jediné přirozené číslo k takové, že:

$$\frac{8}{15} < \frac{n}{n+k} < \frac{7}{13}.$$

Řešení: $\frac{8}{15} < \frac{n}{n+k} < \frac{7}{13} \Rightarrow \frac{15}{8} > \frac{n+k}{n} > \frac{13}{7} \Rightarrow 105n > 56(n+k) > 104n \Rightarrow 49n > 56k > 48n$.
Právě jedno k existuje pro $n = 112$ ($k = 97$), pro vyšší n již ne.

8. Vypočítej součet: $\frac{1}{2[\sqrt{1}]+1} + \frac{1}{2[\sqrt{2}]+1} + \frac{1}{2[\sqrt{3}]+1} + \dots + \frac{1}{2[\sqrt{99}]+1}$.

Řešení: $\frac{1}{2[\sqrt{1}]+1} + \frac{1}{2[\sqrt{2}]+1} + \frac{1}{2[\sqrt{3}]+1} + \dots + \frac{1}{2[\sqrt{99}]+1} = 3 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{5} + 7 \cdot \frac{1}{7} + \dots + 19 \cdot \frac{1}{19} = 9$

Podrobně viz Náboj 2009, úloha 21.

9. Urči, pro kolik reálných hodnot parametru a má rovnice $x^2 + ax + 6a = 0$ kořeny (kořen) v oboru celých čísel.

Řešení: Necht' $x^2 + ax + 6a = (x-s)(x-t) = 0$. Potom $s+t = -a$, $st = 6a$. Odtud dostáváme $st + 6s + 6t = 0 \Rightarrow (s+6)(t+6) = 36$. Součin 36 lze realizovat deseti způsoby: $(-1) \cdot (-36)$, $(-2) \cdot (-18)$, $(-3) \cdot (-12)$, $(-4) \cdot (-9)$, $(-6) \cdot (-6)$, $1 \cdot 36$,... Tomu odpovídá i deset různých hodnot parametru a .

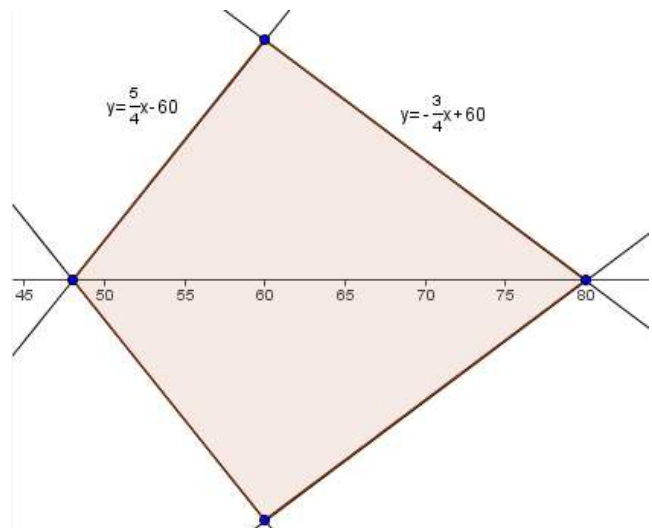
10. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C leží bod P tak, že $|PB| = 10$, $|PC| = 6$ a $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle BPC| = |\sphericalangle CPA|$. Urči $|PA|$.

Řešení: $|PA| = 33$. K řešení stačí využít kosinovou a Pythagorovu větu...

11. Urči obsah plochy ohraničené grafem relace $|x-60| + |y| = \left|\frac{x}{4}\right|$.

Řešení: Protože $|y| = \left|\frac{x}{4}\right| - |x-60| \geq 0$.

Řešení je znázorněno na obrázku – vrcholy deltoidu mají souřadnice $[48; 0]$, $[60; -15]$, $[80; 0]$ a $[60; 15]$ a jeho obsah je $32 \cdot 15 = 480$.



12. Urči hodnotu výrazu $3x^2y^2$, jestliže x a y jsou celá čísla a $y^2 + 3x^2y^2 = 30x^2 + 517$.

Řešení: Od obou stran rovnice odečteme $30x^2$ a výraz na levé straně rozložíme na součin:
 $(3x^2 + 1)(y^2 - 10) = 517 - 10 = 507 = 3 \cdot 169 = 3 \cdot 13^2$. Protože x je celé číslo, výraz $3x^2 + 1$ není dělitelný třemi, totéž platí pro dělitelnost číslem 169. Musí být tedy:
 $3x^2 + 1 = 13$ a $y^2 - 10 = 3 \cdot 13 = 39$. Odtud: $x^2 = 4, y^2 = 49 \Rightarrow 3x^2y^2 = 3 \cdot 4 \cdot 49 = 588$.

13. Necht' $n = 2^{31}3^{19}$. Kolik přirozených dělitelů n^2 je menších než n , ale přitom nejsou děliteli n ?

Řešení: Číslo $n^2 = 2^{62}3^{38}$ má celkem $(62 + 1)(38 + 1)$ dělitelů. Rozdělíme-li dělitele do dvojic tak, aby jejich součiny byl n^2 , je vždy jeden z dvojice menší než n . Takových dělitelů je $\frac{63 \cdot 39 - 1}{2} = 1\,228$. Mezi nimi je ale $32 \cdot 20 - 1 = 639$ dělitelů n , které jsou menší než n . Dělitelů čísla n^2 , které jsou menších než n , ale přitom nejsou děliteli n je tedy $1\,228 - 639 = 589$.

14. Oplocené obdélníkové pole měří $24\text{ m} \times 52\text{ m}$. Zemědělský výzkumník má $2\,018\text{ m}$ plotu, který chce použít pro rozdělení pole na shodné, čtvercové testovací záhony. Celé pole musí být rozděleno a strany čtverců musí být rovnoběžné s okraji pole. Jaký je největší počet čtvercových testovacích záhonů, do kterých může být pole rozděleno pomocí $2\,018\text{ m}$ (nemusí být použita celá délka) plotu?

Řešení: Předpokládejme, že v každém sloupci mřížky je n čtverců, takže v každém řádku se nachází $\frac{52}{24}n = \frac{13}{6}n$ čtverců. Potom $6|n$ a naším cílem je maximalizovat hodnotu n . Příček délky 24 m máme $\frac{13}{6}n - 1$, příček délky 52 m je $n - 1$. Celková délka všech příček tedy je $24\left(\frac{13}{6}n - 1\right) + 52(n - 1) = 104n - 76 \leq 2\,018 \Rightarrow n \leq \frac{2\,094}{104} \approx 20,1 \Rightarrow n \leq 20$. Největší menší násobek 6 je 18, maximální počet čtvercových záhonů tedy bude $\frac{13}{6}n^2 = \frac{13}{6}18^2 = 702$.

15. Urči nejmenší přirozené číslo n , jehož třetí mocnina končí třemi osmičkami.

Řešení: Hledané n bude nejméně trojciferné a na místě jednotek bude dvojka. Lze ho tedy psát ve tvaru $10k + 2$, kde k je nějaké přirozené číslo. Pro jeho třetí mocninu dostaneme:

$$(10k + 2)^3 = 1000k^3 + 600k^2 + 120k + 8.$$

Pro číslici na místě desítek musí být $20k + 8 \equiv 88 \pmod{100}$. Na místě desítek tedy stojí čtyřka nebo devítka. Rozeberme obě možnosti:

4: Třetí mocnina n bude $(100k + 42)^3 \equiv 3(100k) \cdot 42^2 + 42^3 \equiv 200k + 88 \pmod{1\,000}$. Nejmenší možná hodnota $k = 4$ vede k číslu $n = 442$.

9: Třetí mocnina n bude $(100k + 92)^3 \equiv 3(100k) \cdot 92^2 + 92^3 \equiv 200k + 688 \pmod{1\,000}$. Nejmenší možná hodnota $k = 1$ vede k číslu $n = 192$, což je řešení naší úlohy.

16. Na intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ řeš rovnici: $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$

Řešení: $x = 2^{-\sqrt{2}}$ (podrobně na <http://www.realisticky.cz/kapitola.php?id=122> – LR IV)

17. Funkce definovaná na množině uspořádaných dvojic přirozených čísel splňuje tyto podmínky: $f(x, x) = x$, $f(x, y) = f(y, x)$ a $(x + y)f(x, y) = yf(x, x + y)$. Urči $f(14, 52)$.

Řešení: Všimněme si, že $f(14, 52) = f(14, 14 + 38) \Rightarrow 52 \cdot f(14, 38) = 38 \cdot f(14, 52)$.

Budeme postupovat tak dlouho, dokud nebudeme moci využít první podmínku $f(x, x) = x$.

$$\begin{aligned} f(14, 52) &= \frac{52}{38} \cdot f(14, 38) = \frac{52}{38} \cdot \frac{38}{24} \cdot f(14, 24) = \frac{52}{24} \cdot \frac{24}{10} \cdot f(14, 10) = \frac{52}{10} \cdot f(10, 14) = \\ &= \frac{52}{10} \cdot \frac{14}{4} \cdot f(10, 4) = \frac{91}{5} \cdot f(4, 10) = \frac{91}{5} \cdot \frac{10}{6} \cdot f(4, 6) = \frac{91}{3} \cdot \frac{6}{2} \cdot f(4, 2) = 91 \cdot f(2, 4) = \\ &= 91 \cdot 2 \cdot f(2, 2) = 91 \cdot 2 \cdot 2 = 364. \end{aligned}$$

(http://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=1988_AIME_Problems/Problem_8)

18. Urči $\sqrt{2\,018 \cdot 2\,017 \cdot 2\,016 \cdot 2\,015 + 1}$.

Řešení: Pro obecné vyjádření výrazu pod odmocninou dostaneme:

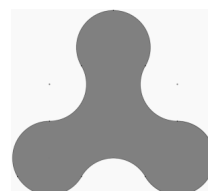
$$\begin{aligned} \sqrt{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) + 1} &= \sqrt{(n+2) \cdot (n-1) \cdot (n+1) \cdot n + 1} = \\ &= \sqrt{(n^2 + n - 2) \cdot (n^2 + n) + 1} = \sqrt{(n^2 + n)^2 - 2(n^2 + n) + 1} = \sqrt{[(n^2 + n) - 1]^2} = \\ &= (n^2 + n) - 1 = n(n+1) - 1. \end{aligned}$$

Pro $n = 2\,016$ dostáváme $2\,016 \cdot 2\,017 - 1 = 4\,066\,271$.

19. Přirozené číslo, u kterého je v každé dvojici sousedních číslic menší ta vlevo, nazveme *rostoucí číslo*. Kolik existuje rostoucích přirozených čísel?

Řešení: V našich číslech se nevyskytuje nula. Z číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 v nich může každá být zastoupena nebo také ne, což dává $2^9 = 512$ různých kombinací. Když vyloučíme čísla jednociferná a variantu, ve které není použita žádná číslice, dostáváme $512 - 10 = 502$ čísel.

20. Obvod útvaru (viz obrázek) je tvořen devíti shodnými oblouky délky $\frac{2}{3}\pi$ m, přičemž středy těchto oblouků leží ve vrcholech pravidelného šestiúhelníku o straně délky 2 m. Jaký obsah má vybarvená plocha?



Řešení: $6\sqrt{3} + \pi$

http://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=2012_AMC_10A_Problems/Problem_18