

Derivace (2)

1. Derivuj funkce:
- a) $y = \sin e^{2x}$ $y' = 2e^{2x} \cos e^{2x}$ **1 bod**
- b) $y = e^{\sin^2 x}$ $y' = 2 \sin x \cos x e^{\sin^2 x}$ **1 bod**
- c) $y = \sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}}$ $y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+e^x}{1-e^x}} \cdot \frac{-e^x(1+e^x) - (1-e^x)e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+e^x}{1-e^x}} \cdot \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2} = -\sqrt{\frac{1+e^x}{1-e^x}} \cdot \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ **2 body**
 (pouze modrá část 1 bod)
2. Vypočítej rozměry pravidelného čtyřbokého hranolu bez horní podstavy, který má při daném povrchu P maximální objem. Úlohu řeš nejprve obecně, pak pro povrch $P = 1 \text{ m}^3$. Urči objem tohoto hranolu.
- Řešení:** Pro povrch P hranolu bez horní podstavy platí $P = a^2 + 4av$, kde a je délka podstavné hrany a v výška hranolu. (tato část 1 bod)
- Protože povrch P je konstantní ($P = 1$), závisí výška hranolu na délce podstavné hrany: $v = \frac{1-a^2}{4a}$ (1 bod)
- Pro objem hranolu pak je $V = a^2 v = a^2 \frac{1-a^2}{4a} = \frac{a-a^3}{4}$. (1 bod)
- Maximum funkce $V(a) = \frac{a-a^3}{4}$ určíme pomocí derivace této funkce: $V'(a) = \frac{1-3a^2}{4}$ (1 bod)
- První derivace $V'(a) = 0$ pro $1 - 3a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,57735$ (1 bod)
- Objem hranolu $V = a^2 v = \frac{1}{3} \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{18} \approx 0,096 \text{ m}^3$. **6 bodů (vše dobře)**
3. Užitím L'Hospitalova pravidla vypočítej:
- a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{2x-1} = \frac{4}{3}$ **1 bod**
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos 2x}{2} = 2$ **2 body, za část řešení 1 bod**
4. Vyšetři průběh funkce: $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$ případně $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$
- Definiční obor $\mathbb{R}$, obor hodnot $\mathbb{R}$
 - Limity v nevlastních bodech ($-\infty$ pro $-\infty$ a $+\infty$ pro $+\infty$),
 - Průsečíky s osou x v bodech 0 a 3, funkční hodnoty kladné na $(0; 3)$ a $(3; +\infty)$
 - Výpočet 1. derivace: $f'(x) = x^2 - 4x + 3$
 nulové body 1. derivace: $f'(x) = x^2 - 4x + 3 = 0$ pro $x = 1$ a $x = 3$
 lokální extrém: lokální maximum v $x = 1$, lokální minimum v $x = 3$
 intervaly monotónnosti: rostoucí na $(-\infty; 1)$ a na $(3; +\infty)$ klesající na $(1; 3)$
 - Výpočet 2. derivace: $f''(x) = 2x - 4$
 nulové body 2. derivace: $x = 2$ (inflexní bod)
 konvexnost a konkávnost: konkávní na $(-\infty; 2)$, konvexní na $(2; +\infty)$
 - Asymptoty (nejsou)
 - Graf funkce si udělej třeba v GeoGebře...
- Bodování: **8 bodů (vše dobře)**, jinak po **1 bodu** (za 1, za 2, za 3, za 7), **2 body** (za 5 a za 4).
- A jestli sis vybral(a) tu druhou funkci, tak si těch 8 bodů laskavě rozděl sám (sama)!*

